

## МОДУЛЬ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель модуля – изучение студентами основных понятий цифровой обработки сигналов, включая модель системы ЦОС, типовые дискретные сигналы и их математическое описание.

В результате изучения модуля студенты *должны знать*:

- принцип построения схемы цифровой обработки сигналов;
- основные этапы ЦОС и их особенности;
- основные типы сигналов.

Студенты *должны уметь*:

- математически описать дискретный сигнал;
- применять теорему Котельникова для определения частоты дискретизации сигналов;
- а также иметь представление о нормировании частоты сигналов.

### 1.1. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов и основные типы сигналов

#### 1.1.1. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов

Системы ЦОС непосредственно оперируют цифровыми сигналами, которые обрабатываются процессором ЦОС. Поэтому, алгоритмическая обработка аналоговых сигналов цифровыми средствами предполагает их предварительное преобразование в цифровую форму, а в системах с аналоговым выходом – и из цифровой формы в аналоговую. Общей структурной схеме системы цифровой обработки аналоговых сигналов (рис. 1.1) отвечает цепочка функциональных преобразований сигнала вида [11]:  $A/A \Rightarrow A/C \Rightarrow C/C \Rightarrow C/A \Rightarrow A/A$  («аналог/аналог», «аналог/цифра», «цифра/цифра», «цифра/аналог», «аналог/аналог»), реализуемых соответственно аналоговым фильтром нижних частот ФНЧ1, аналого-цифровым преобразователем АЦП, процессором ЦОС, цифроаналоговым преобразователем ЦАП и аналоговым фильтром нижних частот ФНЧ2.

Совокупность элементов ФНЧ1, АЦП, ЦАП и ФНЧ2 системы цифровой обработки аналоговых сигналов, выполняющих преобразования сигналов вида  $A/A$ ,  $A/C$  и  $C/A$ , образуют подсистему ее аналогового ввода-вывода или аналого-цифровой интерфейс.

С преобразованиями сигналов при цифровой обработке связаны искажения и погрешности, которые зависят от параметров соответствующих преобразователей. Оценка и выбор их основываются на математических моделях и описаниях сигналов систем ЦОС.

Обобщенная схема и временные диаграммы поэтапного процесса ЦОС представлены на рис. 1.1.

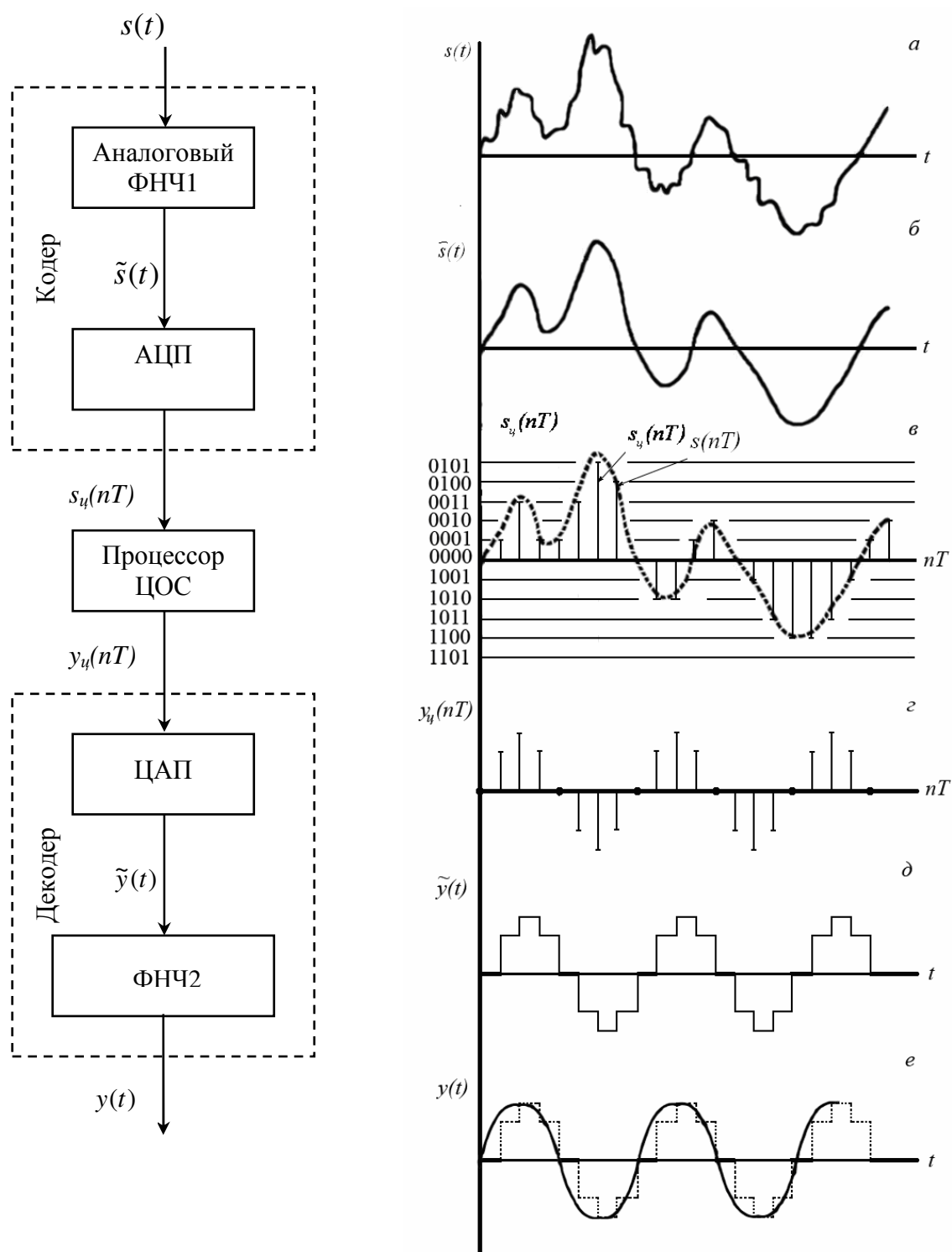


Рис. 1.1. Обобщенная схема цифровой обработки сигнала

На первом этапе кодер, включающий аналоговый фильтр нижних частот (ФНЧ) и аналогово-цифровой преобразователь (АЦП), формирует из исходного аналогового сигнала  $s(t)$  (рис. 1.1, *а*) цифровой сигнал  $s_u(nT)$  (рис. 1.1, *б*). Аналоговый фильтр нижних частот предназначен для ограничения спектра  $F(j\omega)$  исходного аналогового сигнала  $s(t)$ . Необходимость ограничения спектра вытекает из теоремы Котельникова, в соответствии с которой частота дискретизации  $f_D$  выбирается из условия:  $f_D \geq 2f_e$ , где  $f_e$  – верхняя частота спектра сигнала. Возможность ограничения спектра связана с особенностями частотного распределения энергии сигнала: основная часть его энергии сосредоточена в области  $f_e \leq f$ , т. е. амплитуды спектральных составляющих, начиная с некоторой частоты  $f > f_e$ , существенно снижаются. Выбор значения  $f_e$  определяется конкретным типом сигнала и решаемой задачей. При обработке аудио- и видеосигналов выбор  $f_e$  зависит от особенностей психофизического восприятия этих сигналов. Например, для стандартного телефонного сигнала верхняя частота  $f_e$  равна 3,4 кГц, а минимальная стандартная частота дискретизации  $f_D$  – 8 кГц.

Аналого-цифровой преобразователь формирует цифровой сигнал  $s_u(nT)$  посредством дискретизации и квантования сигнала  $\tilde{s}(t)$  с интервалом времени, равным периоду дискретизации  $T$ . Значения отсчетов  $s(nT)$  совпадают со значениями сигнала  $\tilde{s}(t)$  в моменты времени  $t = nT$ :

$$s(nT) = \tilde{s}(t) \big|_{t=nT}.$$

Совокупность отсчетов  $s(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  называют дискретным сигналом.

Квантование по уровню (квантование) производится с целью представления точных значений отсчетов  $s(nT)$  в виде двоичных чисел конечной разрядности – квантованных отсчетов  $s_u(nT)$ . Для этого динамический диапазон дискретного сигнала  $s(nT)$  разбивается на конечное число дискретных уровней – уровней квантования – и каждому отсчету по определенному правилу присваивается значения одного из ближайших уровней, между которыми он оказывается. Уровни квантования кодируются двоичными числами разрядности  $b$ , зависящей от числа уровней квантования  $R$ :

$$R \leq 2^b,$$

где  $b = \text{int}(\log_2 R)$ .

На временной диаграмме (рис. 1.1, *в*) для примера показано 5 уровней квантования (без учета знака), поэтому  $b = 3$  и отсчеты  $s_u(nT)$  кодируются четырехразрядными двоичными числами: один разряд знаковый, три значащих.

Совокупность квантованных кодированных отсчетов  $s_u(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  называют цифровым сигналом.

На втором этапе устройство ЦОС преобразует цифровой сигнал  $s_u(nT)$  (рис. 1.1, в) в цифровой сигнал  $y_u(nT)$  (рис. 1.1, з) по заданному алгоритму.

Устройство ЦОС может быть реализовано аппаратно или программно. В первом случае – в виде специализированного цифрового устройства, во втором – в виде программы на компьютере или цифровом процессоре обработки сигналов (ЦПОС). В настоящее время программная реализация ЦОС значительно преобладает над аппаратной.

Устройства ЦОС могут работать в реальном или нереальном времени.

В реальном времени обработка сигналов должна выполняться в темпе поступления отсчетов входного сигнала  $s_u(nT)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  и отвечать следующим требованиям:

- время цикла  $\Delta t_n$  при вычислении  $y_u(nT)$  не должно превышать интервала между двумя соседними отсчетами  $s_u(nT)$ , т. е. периода дискретизации  $T$  ( $\Delta t_n \leq T$ );
- тактовая частота  $f_m$  процессора должна быть много выше частоты дискретизации  $f_d$  сигнала  $s_u(nT)$  ( $f_m \gg f_d$ ).

Второе требование вызвано тем, что в алгоритмах ЦОС количество операций в цикле, необходимое для вычисления одного отсчета  $y_u(nT)$ , весьма велико. Например, для стандартного телефонного сигнала с частотой дискретизации 8 кГц тактовая частота должна быть не менее 6 МГц.

В реальном времени выполняется обработка сигналов, связанная с их передачей по каналам связи, в том числе, по сети Internet. К типовым задачам ЦОС в реальном времени относятся: обнаружение, фильтрация, сжатие, распознавание сигналов и др.

В нереальном времени выполняется обработка сигналов, связанная, прежде всего, с их исследованием. К типовым задачам ЦОС в нереальном времени относятся: студийная обработка аудио- и видеосигналов; обработка данных различной физической природы, полученная от датчиков, и др.

На третьем этапе декодер формирует результирующий аналоговый сигнал  $y(t)$  из цифрового сигнала  $y_u(nT)$ . В состав декодера входят цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) и сглаживающий фильтр. Цифро-аналоговый преобразователь формирует из цифрового сигнала  $y_u(nT)$  (рис. 1.1, з) ступенчатый аналоговый сигнал  $\tilde{y}(t)$  (рис. 1.1, д). Сглаживающий фильтр (низкочастотный) устраняет ступенчатый эффект (скачки) в выходном сигнале ЦАП  $\tilde{y}(t)$ . На выходе сглаживающего фильтра получаем аналоговый сигнал  $y(t)$  (рис. 1.1, е) – результат преобразования исходного сигнала  $s(t)$ .

### **1.1.2. Основные типы сигналов и их математическое описание**

Для аналитического описания сигналов и процессов их преобразований используют математические модели. Если сигналы рассматривают как функции, заданные в физических координатах, то говорят об одномерных сигналах (например, зависящих от времени), двумерных, заданных на плоскости (например, изображениях), трехмерных (характеризующих, например, трехмерные пространственные объекты). В теории сигналов в качестве математических моделей сигналов используются: скалярные, комплексные и векторные функции. Например, для описания электромагнитного поля как сигнала удобно использовать комплексные функции, для описания цветных изображений – трехкомпонентные векторные функции, для описания данных многоспектральной съемки – 4 – 6-компонентные векторные функции.

Важными общими характеристиками сигналов как математических функций являются множества значений, которые могут принимать они сами и их аргументы. С этой точки зрения целесообразно различать финитные и инфинитные, ограниченные и неограниченные, непрерывные, дискретные, квантованные и цифровые сигналы.

Финитными называются сигналы, область определения которых ограничена [16]. Например, финитным является сигнал, характеризующий кадр фотоснимка, значение электромагнитного поля в раскрыве антенны и т. п. Инфинитные сигналы имеют неограниченную область определения. Финитный сигнал можно превратить в инфинитный, если доопределить его значения за пределами заданного интервала. Однако любое доопределение должно выполняться так, чтобы при обработке сигнала не изменялись его свойства внутри области определения.

Если ограничена область значений сигнала, то сигнал называется ограниченным. Так, например, ограниченным является сигнал, характеризующий степень почернения фотонегатива или распределение яркости свечения экрана телевизионного монитора. Фактически все встречающиеся в природе сигналы являются ограниченными. Неограниченный сигнал – идеализация, принимаемая в тех случаях, когда ограничение области значений сигнала несущественно для данной задачи или просто неизвестно.

С точки зрения математического описания сигналов различают также детерминированное и вероятностное описания. При детерминированном описании сигналы рассматриваются индивидуально, независимо друг от друга, и считается, что значение сигнала может быть задано в каждой точке, где он определен. Однако иногда индивидуальное рассмотрение характеристик физических объектов невозможно, а можно измерить и учесть только некоторое число «макропараметров», характеризующих объекты в среднем. В этих случаях ис-

пользуется вероятностное описание, т. е. сигналы рассматриваются как выборочные функции, или реализации из некоторого ансамбля сигналов, и строится математическое описание не каждого отдельного сигнала, а ансамбля в целом.

Сигналы также подразделяют на дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные. Сигнал считают дискретным по данному параметру, если число значений, которое может принимать этот параметр, конечно (или счетно). Непрерывными называются сигналы, область определения и область значений которых непрерывны, т. е. для каждой точки области определения и области значения можно найти точку, удаленную от нее на бесконечно малое расстояние.

Сигнал, дискретный по одному параметру и непрерывный по другому, называют дискретно-непрерывным.

Как математическая модель используются:

- непрерывная функция непрерывного аргумента (рис. 1.2);
- непрерывная функция дискретного аргумента, например функция, значения которой отсчитывают только в определенные моменты времени (рис. 1.3). Временной интервал между соседними отсчетами называется шагом дискретизации;
- дискретная функция непрерывного аргумента, например функция времени, квантованная по уровню (рис. 1.4);
- дискретная функция дискретного аргумента, принимающая одно из конечного множества возможных значений в дискретные моменты времени (рис. 1.5).

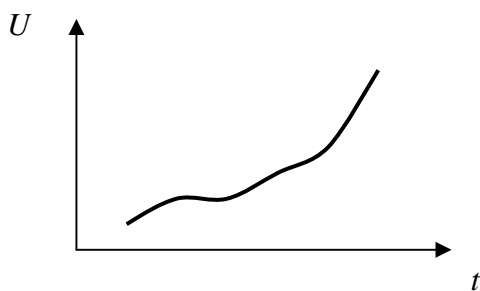


Рис. 1.2. Модель непрерывного сигнала

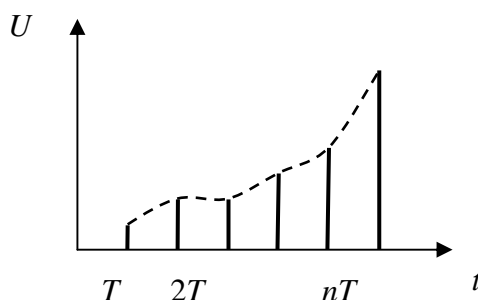


Рис. 1.3. Модель дискретного по времени сигнала

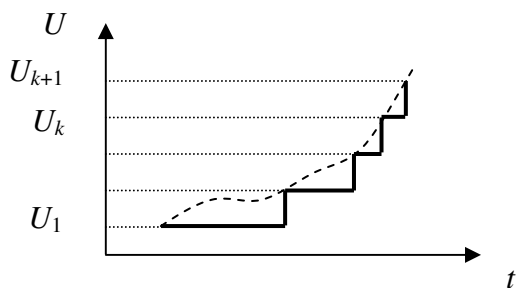


Рис. 1.4. Модель квантованного сигнала

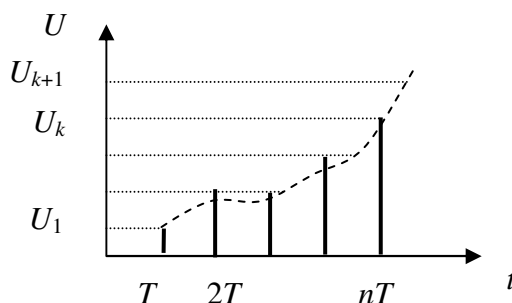


Рис. 1.5. Модель дискретного сигнала

Дискретный сигнал может быть как вещественным, так и комплексным. В последнем случае его вещественная и мнимая части описываются вещественными последовательностями:

$$s(nT) = s_1(nT) + js_2(nT).$$

При описании дискретных и цифровых сигналов используют такое понятие, как нормированное время  $\hat{t}$ :

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

которое при  $t = nT$  имеет смысл номера отсчета  $n$ :

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n, \quad (1.2)$$

и означает, что отсчет взят в момент  $nT$ .

Это позволяет описывать дискретный сигнал функцией целочисленной переменной  $s(n)$  и считать тождественными обозначения дискретного сигнала  $s(n)$  и  $s(nT)$ :

$$s(nT) = s(n).$$

## **1.2. Типовые дискретные сигналы и их математическое описание. Основная полоса частот и нормирование частоты**

### **1.2.1. Типовые дискретные сигналы [11]**

Цифровой единичный импульс (дельта-импульс), описываемый последовательностью:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0; \\ 0, n \neq 0, \end{cases}$$

т. е. этот сигнал равен единице при  $n = 0$  и нулю при всех остальных значениях  $n$  (рис. 1.6, а).

Задержанный цифровой единичный импульс описывается последовательностью:

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, n = m; \\ 0, n \neq m, \end{cases}$$

т. е. этот сигнал, в отличие от незадержанного, равен единице при  $n = m$  и нулю при всех остальных значениях  $n$  (рис. 1.4, б).

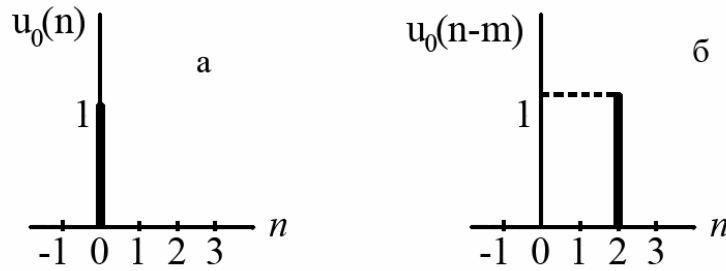


Рис. 1.6. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) импульсы

Цифровой единичный скачок, описываемый последовательностью:

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0, \end{cases}$$

т. е. этот сигнал равен единице при всех неотрицательных значениях  $n$  (рис. 1.7, а).

Задержанный цифровой единичный скачок (рис. 1.7, б) описывается последовательностью:

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m; \\ 0, n < m, \end{cases}$$

т. е. этот сигнал, в отличие от незадержанного, равен единице при всех значениях  $n \geq m$  и нулю при остальных значениях  $n$ .

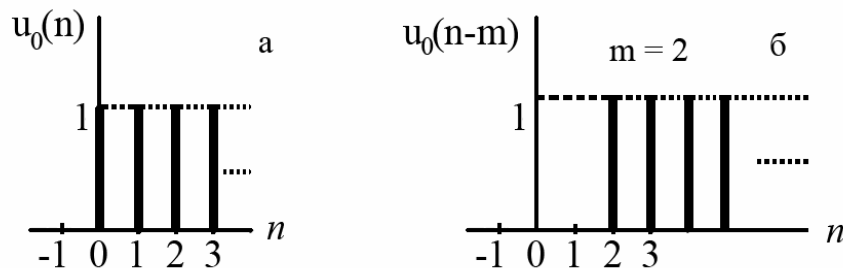


Рис. 1.7. Цифровой единичный (а) и задержанный цифровой единичный (б) скачки

Дискретная экспонента, описываемая последовательностью:

$$s(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0; \\ 0, n < 0, \end{cases}$$

где  $a$  – вещественная константа.



В зависимости от величины и знака  $a$  дискретная экспонента будет:

- $|a| < 1$  и  $a > 0$  – убывающей знакопостоянной (рис. 1.8, а);
- $|a| < 1$  и  $a < 0$  – убывающей знакопеременной (рис. 1.8, б);
- $|a| > 1$  – возрастающей;
- $|a| = 1$  и  $a > 0$  – цифровым единичным скачком;
- $|a| = 1$  и  $a < 0$  – знакопеременной последовательностью единиц.

Дискретный гармонический сигнал, например, дискретная косинусоида, описываемая последовательностью:

$$s(nT) = s(n) = A \cos(2\pi f n T) = A \cos(\omega n T),$$

где  $T$  – период дискретизации;

$A$  – амплитуда;

$\omega$  – круговая частота, связанная с частотой  $f$  коэффициентом пропорциональности  $2\pi$  ( $\omega = 2\pi f$ ).

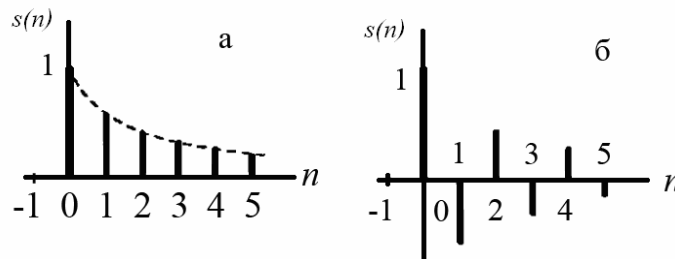


Рис. 1.8. Знакопостоянная (а) и знакопеременная (б) дискретные экспоненты

Дискретная косинусоида получается из аналоговой в результате замены непрерывного времени дискретным (рис. 1.9):

$$s(t) = A \cos(2\pi f t) = A \cos(\omega t),$$

$$s(nT) = s(n) = A \cos(\omega t) \big|_{t=nT} = A \cos(\omega T n).$$

Дискретная синусоида описывается аналогично.

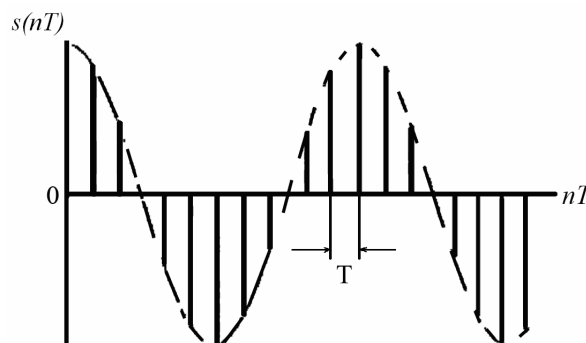


Рис. 1.9. Дискретная косинусоида

Дискретный комплексный гармонический сигнал, описываемый комплексной последовательностью:

$$s(n) = Ae^{jvTn},$$

или двумя вещественными последовательностями: косинусоидой (вещественная часть) и синусоидой (мнимая часть):

$$s(nT) = A \cos(\omega Tn) + jA \sin(\omega Tn).$$

### 1.2.2. Основная полоса частот. Нормирование частоты

Согласно теореме Котельникова, верхняя частота  $f_e$  аналогового сигнала не должна превышать половины частоты дискретизации  $f_D$  этого сигнала. Следовательно, дискретные сигналы целесообразно рассматривать в области  $\left[0; \frac{f_D}{2}\right]$ , которая называется основной полосой частот или основным диапазоном частот [11].

Это позволяет ввести понятие нормированных частот:

- 1)  $\hat{f}$  – отношение текущей частоты  $f$  к частоте дискретизации  $f_D$ :

$$\hat{f} = \frac{f}{f_D} = fT;$$

- 2)  $\hat{\omega}$  – отношение текущей частоты  $\omega$  к частоте дискретизации  $f_D$ :

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_D} = \omega T;$$

- 3) нормирование частоты  $\hat{f}$  и  $\hat{\omega}$  связаны отношением:

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_D} = \frac{2\pi f}{f_D} = 2\pi \hat{f}.$$

В зависимости от выбранной шкалы частот основная полоса соответствует областям:

$$\begin{aligned} f &\rightarrow \left[0; \frac{f_D}{2}\right]; \\ f &\rightarrow [0; 0.5]; \\ \omega &\rightarrow \left[0; \frac{\omega_D}{2}\right] = \left[0; \frac{\pi}{T}\right]; \\ \omega &\rightarrow [0; \pi]. \end{aligned}$$

Используются абсолютная частота  $f$  и нормированная частота  $\hat{\omega}$ .

Для косинусоиды в области нормированных частот выражение имеет вид:

$$s(n) = A \cos(2\pi \hat{f} n) = A \cos(\hat{\omega} n).$$

Введение нормированной частоты указывает на то, что в ЦОС важны не абсолютные значения частот сигнала и дискретизации, а их отношение.

Пример двух дискретных косинусоид [11]:

$$s_1(n) = \cos(2\pi f_1 T_1 n) = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_{D1}} n\right) \text{ при } f_1 = 4 \text{ Гц, } f_{D1} = 16 \text{ Гц;}$$

$$s_2(n) = \cos(2\pi f_2 T_2 n) = \cos\left(2\pi \frac{f_2}{f_{D2}} n\right) \text{ при } f_2 = 10 \text{ кГц, } f_{D2} = 40 \text{ кГц.}$$

Подставив значения  $f_1$  и  $f_D$ , получим в области нормированных частот одинаковые дискретные сигналы:

$$s_1(n) = \cos\left(2\pi \frac{4}{16} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right);$$

$$s_2(n) = \cos\left(2\pi \frac{10000}{40000} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right).$$

### 1.3. Вопросы и задания для самопроверки

1. Назовите и обоснуйте основные преимущества и недостатки ЦОС по сравнению с системами аналоговой обработки сигналов.

2. Что такое сигнал и что понимают под цифровой обработкой сигналов?

3. Представьте структурную схему ЦОС и поясните принцип ее работы.

4. Сформулируйте теорему Котельникова и ее назначение.

5. Какие сигналы называют одномерными, двухмерными и трехмерными? Приведите примеры.

6. Дайте определение дискретному, непрерывному и дискретно-непрерывному сигналу, приведите примеры.

7. Назовите типовые дискретные сигналы и опишите их математически.

8. Для каких целей в ЦОС используется нормирование частоты?

9. В каких областях используется цифровая обработка сигналов?

## МОДУЛЬ 2. ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И АЛГОРИТМЫ ЦОС

Цель модуля – изучение студентами дискретных преобразований применяемых при разработке алгоритмов цифровой обработки сигналов.

В результате изучения модуля студенты *должны знать*:

- дискретные преобразования: Фурье, Адамара, Хаара, вейвлет-преобразование;
- быстрые алгоритмы дискретных преобразований;
- ключевые операции ЦОС.

Студенты *должны уметь*:

- разрабатывать эффективные алгоритмы цифровой обработки сигналов на основе дискретных преобразований;
- оценивать вычислительную и пространственную сложность алгоритмов цифровой обработки сигналов;
- а также иметь представление о видах вейвлетов и возможности их применения для решения конкретных задач ЦОС.

### 2.1. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

#### 2.1.1. Основы преобразования Фурье

Выражение регулярного сигнала определенной функцией времени называют временным представлением сигнала. В частности, при некоторых ограничениях, функция времени, заданная на некотором отрезке времени, может быть представлена в виде тригонометрического ряда, каждый член которого является простейшей гармонической функцией времени (косинус, синус). Эти функции называются гармониками и каждой из них принадлежат определенные амплитуда, частота и фаз.

Множество амплитуд, частот и фаз называют спектром рассматриваемого сигнала. Функция времени находится в однозначном соответствии с принадлежащим ей спектром. На этом основании временное представление сигнала может быть заменено так называемым частотным представлением. Оба представления адекватны.

Представление периодического сигнала суммой гармонических составляющих осуществляется с помощью его разложения в ряд Фурье. Если функция (сигнал)  $f(t)$  задана на интервале времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  и повторяется с периодом  $T_p = 2\pi/\omega$ , то тригонометрическая форма ряда Фурье для нее может быть записана следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega T + b_n \sin n\omega T).$$

Амплитуды косинусоидальных и синусоидальных членов определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) \cos(n\omega t) dt ;$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) \sin(n\omega t) dt .$$

Слагаемое  $\frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) dt$  является постоянной составляющей

сигнала, которая равна среднему значению функции  $f(t)$  за период.

Частоты  $n\omega$  называют  $n$ -ми гармониками частоты  $\omega$ . Следовательно, бесконечный ряд содержит зависящие от частоты синусоидальные и косинусоидальные члены с различными амплитудами на положительных частотах гармоник.

Амплитуда  $D_n$  и фаза  $\psi_n$   $n$ -ой гармоники связаны с величинами  $a_n$  и  $b_n$  соотношениями:

$$D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \psi_n = \arctg(b_n/a_n).$$

Весьма удобной является комплексная форма записи ряда Фурье, к которой легко перейти, если выразить тригонометрические функции через показательные, воспользовавшись известными формулами Эйлера:

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t});$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}).$$

В результате получим:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{jn\omega t} + A_n^* e^{-jn\omega t}),$$

где  $A_n$  и  $A_n^*$  – комплексные амплитуды, связанные с  $a_n$  и  $b_n$  соотношениями

$$A_n e^{-j\psi_n} = a_n - jb_n,$$

$$A_n^* e^{j\psi_n} = a_n + jb_n.$$

Таким образом, комплексные амплитуды  $A_n$  и  $A_n^*$  являются комплексно-сопряженными величинами. Действительно каждое слагаемое ряда можно представить как вектор на комплексной плоскости (рис. 2.1), вращающийся с частотой  $n\omega$  (т. е. в положительном направлении отсчета углов – против направления движения часовой стрелки). Каждое слагаемое второго ряда – вектор, вращающийся в обратном направлении.

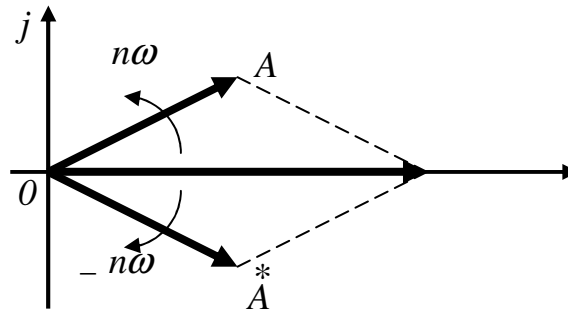


Рис. 2.1. Векторная диаграмма комплексно-сопряженных величин

Так как  $A_n$  и  $A_n^*$  – комплексно-сопряженные величины, то сумма векторов в любой момент времени дает вектор, направленный по вещественной оси, т. е.  $n$ -ю гармоническую составляющую вещественной функции времени  $f(t)$ . Отрицательная частота ( $-n\omega$ ) только указывает направление вращения вектора.

Таким образом, комплексная амплитуда  $D_n$  может быть определена согласно выражению

$$D_n = \frac{1}{T_p} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Следовательно, в экспоненциальной форме ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega t}.$$

При такой записи ряда Фурье периодический сигнал заменяется суммой простых гармонических колебаний как с положительными частотами ( $n > 0$ ), так и с отрицательными ( $n < 0$ ). Конечно, отрицательные частоты не имеют здесь физического смысла, а являются формальным следствием произведенного математического преобразования.

### 2.1.2. Дискретные экспоненциальные функции

Дискретный сигнал  $s(n)$ , заданный на интервале  $[0, \infty)$  можно записать в виде [8]:

$$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c(k) \eta_k(n),$$

где 
$$c(k) = E_k^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \eta_k(n).$$

Здесь  $\{\eta_k(n)\}$  – совокупность базисных функций, определенных на том же интервале;  $\{c(k)\}$  – коэффициенты разложения сигнала по базису  $\{\eta_k(n)\}$ , называемые спектром сигнала;  $E_k$  – энергия  $k$ -й базисной функции.

Из выражений следует, что сигнал можно задать либо его отсчетами в дискретных точках, либо набором спектральных коэффициентов, причем спектральное представление неоднозначно и зависит от выбранной системы базисных функций. Выбор системы  $\{\eta_k(n)\}$  определяется соображениями практического или математического удобства.

Математические преобразования применяются к сигналу для того, чтобы получить о нем какую-то дополнительную информацию, недоступную в исходном виде. Среди ряда известных преобразований сигналов наиболее часто используется на практике преобразование Фурье.

Дискретное преобразование Фурье оперирует дискретной по времени выборкой периодического сигнала во временной области  $\{s(n)\} = \{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\}$ . Для того, чтобы быть представленным в виде суммы синусоид, сигнал должен быть периодическим. Но в качестве набора входных данных для ДПФ доступно только конечное число отсчетов ( $N$ ).

В дискретном преобразовании Фурье используется система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), которая определяется следующим выражением:

$$def(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right),$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ;

$k$  и  $n$  – принимают целочисленные значения  $(0, 1, 2, \dots, N-1)$ .

Переменную  $k$  отождествляют с номером функции, а переменную  $n$  – с номером отсчета.

Если обозначить  $W = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$ , то  $def(k, n) = W^{kn} = W_N^{k \cdot n}$ .

Всю систему ДЭФ можно записать в виде матрицы  $V$ , строки которой нумеруются переменной  $k$ , столбцы переменной  $n$ , а в пересечении  $k$ -й строки и  $n$ -го столбца записана величина  $W^{kn}$ . Такое представление называется матричным представлением ДЭФ.

$$V = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ k & -- & -- & -- & W^{kn} & -- & -- & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ N-1 & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Например, для  $N = 8$  матрица  $V$  имеет следующий вид:

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix}.$$

### Основные свойства ДЭФ [8]:

### 1. Ортогональность:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} W^{-ln} = \begin{cases} N, \text{если } (k-l) \equiv 0 \pmod N; \\ 0, \text{если } (k-l) \not\equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$



Свойство ортогональности показывает, что скалярное произведение любых двух строк матрицы  $V$ , одна из которых взята с комплексно сопряженными элементами, равно нулю, если строки различны, и равно  $N$ , если они совпадают. Матричная запись этого свойства имеет следующий вид:

$$V(V^T)^* = NI,$$

где знак  $*$  – означает взятие комплексного сопряжения для всех элементов матрицы ( $I$  – единичная матрица).

2. *Периодичность.* Если  $kn = Nl + r$ , то  $W^{kn} = W^{Nl}W^r = W^r$ , что позволяет записать элементы матрицы  $V$  с минимальными степенями (фазами). Например, для  $N = 8$ :

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\ W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}.$$

3. *Симметричность:*

$$V = V^T.$$

Свойство симметричности позволяет легко найти обратную матрицу для матрицы  $V$ . Матричное выражение для ортогональности запишется:

$$VV^* = NI.$$

Умножив обе части этого равенства справа на  $V^{-1}$ , получим:

$$V^{-1} = N^{-1}V^*.$$

4. *Мультипликативность:*

– по номеру функции:

$$\text{def}(k_1, n) \text{def}(k_2, n) = \text{def}(k_1 + k_2, n);$$

– по номеру отсчета:

$$\text{def}(k, n_1) \text{def}(k, n_2) = \text{def}(k, n_1 + n_2).$$

Свойство означает, что при умножении любых двух строк (столбцов) матрицы  $V$  получается соответственно строка (столбец) той же матрицы, причем номер строки (столбца) равен сумме номеров сомножителей.

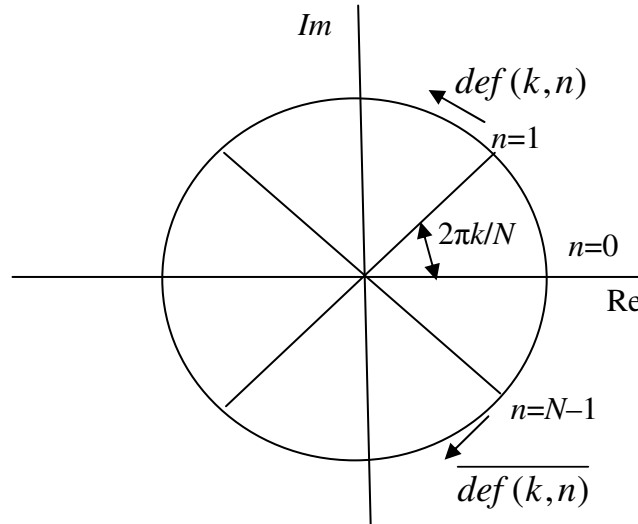


Рис. 2.2. Представление ДЭФ в виде вектора

Подобно обычным комплексным экспоненциальным функциям, ДЭФ можно изобразить на плоскости в виде вращающегося вектора единичной длины, проекции которого на оси абсцисс и ординат дают действительную и мнимую части функции (рис. 2.2). Разница будет заключаться в том, что если у обычных функций этот вектор вращается непрерывно, то в случае ДЭФ он вращается скачкообразно, проходя при изменении  $n$  на единицу угол  $2\pi k/N$  рад. В общей сложности на интервале  $N$  вектор проходит угол  $2\pi k$  рад, т. е. совершает ровно  $k$  оборотов. Движение комплексно-сопряженного вектора  $\overline{def(k, n)} = def(N - k, n)$  при изменении  $n$  на единицу можно представить как поворот на один оборот и возврат обратно на угол  $2\pi k/N$  рад, так, что создается иллюзия вращения в противоположную сторону (стробоскопический эффект). Такому представлению соответствует запись системы ДЭФ в виде матрицы с полными фазами, а матрица с минимальными фазами не дает представления об истинной скорости вращения вектора. Поэтому величину  $W^{kn}$  называют *поворачивающим множителем*.

По формуле Эйлера можно выразить значения вещественной и мнимой частей поворачивающих множителей через косинус и синус угла поворота  $\theta$  соответственно:

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta).$$

Более того, при значениях  $k \geq \frac{N}{2}$  значения поворачивающих множителей можно найти из соображения симметрии:

$$e^{-j\frac{2\pi(\frac{N}{2}+k)}{N}} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi k}{N}} = -e^{-j\frac{2\pi k}{N}}, \text{ при } 0 \leq k \leq \frac{N}{2}.$$

Вычисление поворачивающегося множителя для 8-ми точечной последовательности показано на рис. 2.3, а значения поворачивающегося множителя приведены в табл. 2.1.

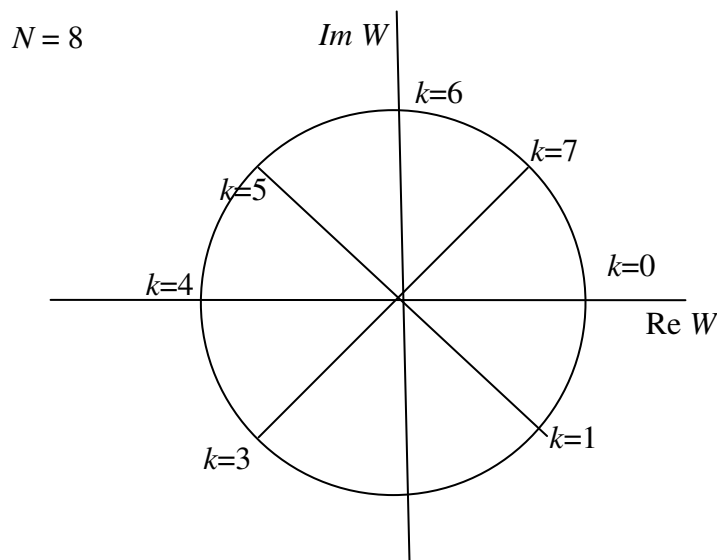


Рис. 2.3. Представление поворачивающегося множителя для восьмиточечной последовательности

Таблица 2.1

**Значения поворачивающегося множителя  
для восьмиточечной последовательности**

Значения $k$	Поворачивающий множитель
0	1
1	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2	$-j$
3	$-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4	-1
5	$-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
6	$j$
7	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

### 2.1.3. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Пара дискретного преобразования Фурье последовательности  $\{s(n)\} = \{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\}$  определяется следующими равенствами [8]:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)W^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (2.1)$$

$$s(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)W^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (2.2)$$

где  $\{f(k)\}$  – дискретный спектр.

Выражение (2.1) называется прямым преобразованием, а выражение (2.2) – обратным. Равенства (2.1) и (2.2) представляют собой экспоненциальную форму записи ДПФ. Как уже было отмечено, ДПФ устанавливает связь между временными и частотным представлениями сигнала при разложении в базисе гармонических функций.

В матричной форме ДПФ имеет вид:

$$F = VS, \\ S = N^{-1}V^*F.$$

Матрицы прямого и обратного преобразований  $V$  и  $V^*$  соответственно состоят из комплексно-сопряженных элементов  $W^{kn}$  и  $W^{-kn}$ . Для  $k = n = 0$  строки обеих матриц совпадают и состоят только из единиц. Поэтому  $s(0) = N^{-1}f(0)$ . Для  $k \neq 0$  можно записать следующее равенство:

$$W^{(N-k)n} = W^{Nn}W^{-kn} = W^{-kn}.$$

Из него следует, что строки матрицы  $V^*$  совпадают со строками матрицы  $V$ , но записаны в обратном порядке. Поэтому для вычисления обратного ДПФ вместо  $V^*$  можно использовать матрицу прямого преобразования  $V$ , но результат умножения на эту матрицу следует прочесть в обратном порядке и уменьшить в  $N$  раз.

Основные области применения ДПФ:

1) цифровой спектральный анализ:

- анализаторы спектра;
- обработка речи;
- обработка изображений;
- распознавание образов;
- проектирование фильтров;
- вычисление импульсной характеристики по частотной;
- вычисление частотной характеристики по импульсной;

2) быстрое преобразование Фурье (БПФ) – простой алгоритм для эффективного вычисления ДПФ.

Пример ДПФ для  $\{s(n)\} = \{1, 0, 0, 1\}$ .

Матрица ДЭФ для выполнения ДПФ входного сигнала с количеством отсчетов  $N = 4$  имеет вид:

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}.$$

Поворачивающийся множитель  $W^{kn}$  для  $N = 4$  на комплексной плоскости представлен на рис. 2.4.

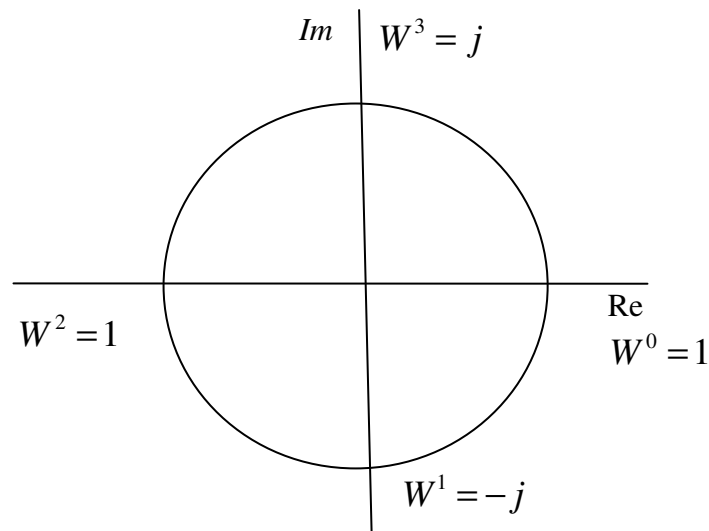


Рис. 2.4. Представление поворачивающегося множителя для восьмиточечной последовательности

Следовательно:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+j \\ 0 \\ 1-j \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, временному ряду  $\{1,0,0,1\}$  соответствует его ДПФ образ вида  $\{2,1+j,0,1-j\}$ .

ДПФ принято представлять в виде графиков зависимости  $|f(k)|$  от номера гармоники  $k$  или от частоты  $\omega$ . Чтобы определить  $\omega$ , необходимо знать значение интервала дискретизации. Если предположить, что представленная выше последовательность была дискретизована с частотой 8 кГц, то  $T = 1 / (8 \cdot 10^3) = 125$  мкс. Тогда  $\omega = 2\pi / (NT) = 2\pi / (4 \cdot 125 \cdot 10^{-6}) = 12,57 \cdot 10^3$  рад/с. Следовательно,  $2\omega = 25,14 \cdot 10^3$  рад/с,  $3\omega = 37,71 \cdot 10^3$  рад/с.

Свойства ДПФ[8]:

1. *Периодичность.* В силу периодичности ДЭФ функции  $f(k)$  и  $s(n)$  также периодичны, т. е.:

$$f(Nl \pm k) = f(\pm k); s(Nl \pm n) = s(\pm n).$$

2. *Связь с коэффициентами ряда Фурье.* Если частота дискретизации выбрана в соответствии с теоремой Котельникова, то при дискретизации периодической аналоговой функций  $s(t)$  ДПФ позволяет по выборкам  $s(n)$  найти спектр  $f(k)$ , который на интервале  $0 \leq k \leq N-1$  равен спектру исходной функции  $s(t)$ . При этом первые  $\left(\frac{N}{2}-1\right)$  точек функции  $f(k)$  соответствуют спектральным линиям на положительных частотах, а последние  $\left(\frac{N}{2}-1\right)$  точек  $f(k)$  – спектральным линиям на отрицательных частотах. В обратном преобразовании первые  $\left(\frac{N}{2}-1\right)$  линий функции  $s(n)$  соответствуют области положительных времен, а последние  $\left(\frac{N}{2}-1\right)$  линий – области отрицательных времен.

3. *Линейность.* Пусть даны последовательности  $x(n)$  и  $y(n)$ , для которых ДПФ равны соответственно  $f_x(k)$  и  $f_y(k)$ . Рассмотрим взвешенную сумму этих последовательностей  $z(n) = ax(n) + by(n)$ . Спектр последовательности  $z(n)$  равен аналогичной взвешенной сумме спектров последовательностей  $x(n)$  и  $y(n)$ , т. е.:

$$f_z(k) = af_x(k) + bf_y(k).$$

4. *Инвариантность относительно сдвига по времени и частоте.* Пусть последовательность  $z(n)$  образована сдвигом по времени последовательности  $s(n)$ , т. е.  $z(n) = s(n \pm h)$ . Тогда:

$$f_z(k) = W^{\mp kh} f_s(k).$$

Данное свойство показывает, что при сдвиге по времени амплитудный спектр (величина амплитуд отдельных гармоник) не меняется. Изменениям подвергаются только фазы гармонических составляющих (фазовый спектр).

Аналогичное свойство справедливо и для обратного преобразования, а именно: если  $l(k) = f(k \pm h)$ , то:

$$S_F(n) = W^{\pm nh} s_l(n).$$

5. *Теорема о свертке.* Пусть  $\{f_s(k)\}$  и  $\{f_h(k)\}$  – спектры последовательностей  $\{s(n)\}$  и  $\{h(n)\}$  соответственно. Теорема о свертке утверждает, что спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей, т. е.:

$$f_y(k) = f_s(k) f_h(k). \quad (2.3)$$

Матричное представление свертки имеет вид:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(N-1) \\ h(1) & h(2) & \dots & \dots & \dots & h(0) \\ h(2) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(N-1) & h(0) & \dots & \dots & \dots & h(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(N-1) \\ s(N-2) \\ \vdots \\ s(1) \end{bmatrix}.$$

Теорема позволяет вычислить свертку при помощи ДПФ по формуле:

$$\{y(n)\} = \text{ДПФ}^{-1}(\text{ДПФ}\{s(n)\} \cdot \text{ДПФ}\{h(n)\}).$$

6. *Теорема о корреляции.* Спектр корреляционной функции последовательностей  $\{s(n)\}$  и  $\{h(n)\}$  равен произведению их спектров, причем один из спектров берется в комплексном сопряжении, т. е.:

$$f_r(k) = f_h^*(k) f_s(k) = f_h(k) f_s^*(k).$$

Матричное представление корреляции:

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ . \\ . \\ . \\ r(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & h(N-1) \\ h(N-1) & h(0) & \dots & h(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(1) & h(2) & \dots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ . \\ . \\ . \\ s(N-1) \end{bmatrix}.$$

7. ДПФ вещественных последовательностей. Определяется согласно выражению:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right).$$

Отсюда особенности:

а) спектральные коэффициенты комплексно сопряжены относительно счета  $N/2$ , т. е.:

$$f\left(\frac{N}{2} + l\right) = f^*\left(\frac{N}{2} - l\right), \quad l = 0, 1, \dots, N/2,$$

а коэффициент  $f(N/2)$  для четных  $N$  всегда действителен;

б) если последовательность  $\{s(n)\}$  четная, т. е.  $\{s(n)\} = \{s(-n)\}$ , то ее ДПФ  $\{f(k)\}$  – вещественная последовательность. Аналогично, если  $\{s(n)\}$  нечетная, т. е.  $\{s(n)\} = -\{s(-n)\}$ , то ее ДПФ  $f(k)$  есть чисто мнимая последовательность.

8. Равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=0}^{N-1} s^2(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2.$$

Данное соотношение показывает, что энергия сигнала равна суммарной энергии спектральных компонент, т. е. энергия сигнала больше нигде не расходуется.

## 2.2. Ключевые операции ЦОС: свертка и корреляция

### 2.2.1. Импульсная и переходная характеристики

Дискретная система преобразует входной дискретный сигнал  $s(nT)$  в выходной дискретный сигнал  $y(nT)$ :

$$y(nT) = F[s(nT)],$$



где  $F$  – оператор, определяющий математическое преобразование (линейное или нелинейное алгебраическое, дифференциальное и т. д.).

Дискретная система называется стационарной, если ее реакция инвариантна по отношению к началу отсчета времени (свойство инвариантности во времени), т. е. для реакции  $y(nT)$  и  $y_1(nT) = y[(n - m)T]$  при любом целом  $m$  справедливо равенство [11]:

$$y(nT) = y_1[(n + m)T].$$

Параметры стационарной системы неизменны во времени.

В стационарной системе задержка воздействия на время  $mT$  ( $m > 0$ ) приводит к задержке реакции на то же время:

$$s[(n - m)T] \Rightarrow y[(n - m)T].$$

В дискретной системе начальные условия могут быть нулевыми или ненулевыми.

Для нулевых начальных условий является отсутствие реакции  $y(nT) = 0$  при отсутствии воздействия  $s(nT) = 0$ . Для ненулевых начальных условий является наличие значений реакции (свободных колебаний) при отсутствии воздействия.

Во временной области основной характеристикой линейной дискретной системы является импульсная характеристика (ИХ).

Импульсной характеристикой  $h(nT)$  дискретной системы называется ее реакция цифровой единичный импульс  $u_0(nT)$  при нулевых начальных условиях [11].

Импульсную характеристику  $h(nT)$  считают основной характеристикой системы, потому что, зная ее, можно определить реакцию на любое (произвольное) воздействие.

Переходной характеристикой  $g(nT)$  линейной дискретной системы называется ее реакция на цифровой единичный скачок  $u_1(nT)$  при нулевых начальных условиях.

Переходная характеристика линейной дискретной системы связана с ее импульсной характеристикой соотношением [11]:

$$g(nT) = \sum_{m=0}^n h(mT).$$

Например, если импульсная характеристика имеет вид убывающей дискретной экспоненты:

$$h(n) = a^n, |a| < 1,$$

то переходная характеристика определяется как сумма конечной убывающей геометрической прогрессии и имеет следующий вид:

$$g(nT) = \sum_{m=0}^n h(mT) = \sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Зная переходную характеристику  $g(nT)$ , также можно определить реакцию на произвольное взаимодействие.

Во временной области соотношение вход/выход линейной дискретной системы описывается линейными уравнениями:

- формулой свертки (сверткой), если используется импульсная характеристика;
- разностными уравнениями, если используются параметры дискретной системы.

### 2.2.2. Линейная свертка

Свертка – это математический способ комбинирования двух сигналов для формирования третьего сигнала [11]. Это один из самых важных методов ЦОС. Свертка связывает три сигнала: входной сигнал, выходной сигнал и импульсную характеристику системы.

Формулой свертки (сверткой) называют линейное уравнение вида:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h[(n-m)T]s(mT), \quad (2.4)$$

где  $h[(n-m)T]$  – импульсная характеристика, задержанная на  $m$  периодов дискретизации.

Таким образом, реакция системы  $y(nT)$  вычисляется как дискретная свертка воздействия  $s(nT)$  и импульсной характеристики  $h(nT)$ .

Выполнив в (2.4) замену переменных, можно записать другой вариант записи формулы свертки:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)s[(n-m)T]. \quad (2.5)$$

Для нормированного времени формулы (2.4) и (2.5) принимают вид соответственно:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)s(m),$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)s(n-m).$$

При стандартном обозначении операции свертки, формулы (2.4) и (2.5) записываются в комплексном виде

$$y(n) = s(n) * h(n).$$

Рассмотрим две апериодические последовательности  $s(n)$  длины  $L$ ,  $s(n) = 0$  при  $L-1 < n < 0$  и последовательность  $h(n)$  длины  $M$ ,  $h(n) = 0$  при  $M-1 < n < 0$ . Апериодическая или линейная свертка этих последовательностей имеет длину  $L+M-1$  и определяется как:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L+M-2} h(m)s(n-m), n=0,1,...,L+M-2.$$

В матричной форме свертка при  $L=M=N$  получим

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y(2N-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & & & & & & & \\ h(1) & h(0) & & & & & & \\ h(2) & h(1) & h(0) & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ h(N-1) & h(N-2) & h(N-3) & & & & h(0) & \\ & h(N-1) & h(N-2) & & & & h(1) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & h(N-1) & h(N-2) & \\ & & & & & h(N-1) & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ s(N-1) \end{bmatrix}$$

В большинстве алгоритмов вычисления свертки входная последовательность  $\{h(l)\}$  делится на последовательные блоки по  $N$  – отсчетов и  $y(n)$  вычисляется как сумма линейных сверток каждого из этих блоков с  $L$  – точечной последовательностью  $s(m)$ .

Пример [11]. Вычислить реакцию линейной дискретной системы по формуле свертки при нулевых начальных условиях. Импульсная характеристика и воздействие заданы графически на рис. 2.5 и рис. 2.6. Требуется определить 7 отсчетов реакции.

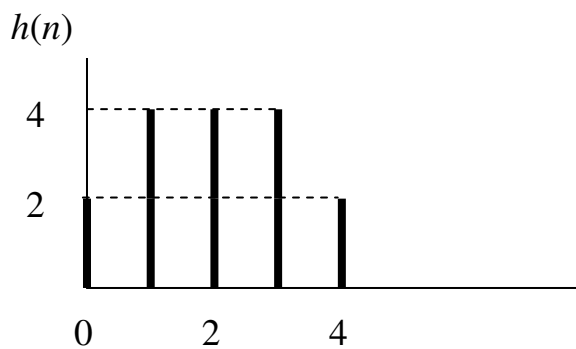


Рис. 2.5. Импульсная характеристика системы

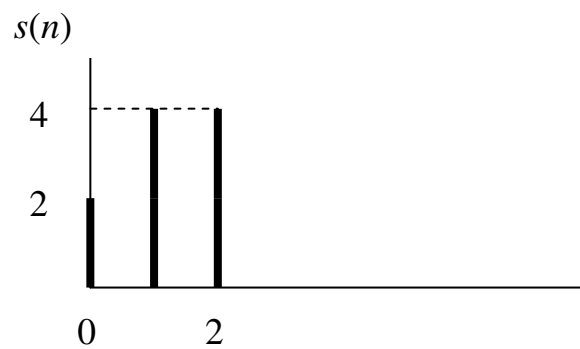


Рис. 2.6. Входной сигнал

Линейная свертка этих последовательностей имеет длину  $L + M - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$ . Вычисление свертки представлено в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Вычисление свертки

$n$	Реакции системы
0	$y(0) = h(0)s(0) + h(1)s(-1) + h(2)s(-2) + \dots = h(0)s(0) = 2 \cdot 2 = 4$
1	$y(1) = h(0)s(1) + h(1)s(0) + h(2)s(-1) + \dots = h(0)s(1) + h(1)s(0) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16$
2	$y(2) = h(0)s(2) + h(1)s(1) + h(2)s(0) + h(3)s(-1) + \dots =$ $= h(0)s(2) + h(1)s(1) + h(2)s(0) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 32$
3	$y(3) = h(0)s(3) + h(1)s(2) + h(2)s(1) + h(3)s(0) + h(4)s(-1) + \dots =$ $= h(0)s(3) + h(1)s(2) + h(2)s(1) + h(3)s(0) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 40$
4	$y(4) = h(0)s(4) + h(1)s(3) + h(2)s(2) + h(3)s(1) + h(4)s(0) + h(5)s(-1) + \dots =$ $= h(0)s(4) + h(1)s(3) + h(2)s(2) + h(3)s(1) + h(4)s(0) =$ $= 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 36$
5	$y(5) = h(0)s(5) + h(1)s(4) + h(2)s(3) + h(3)s(2) + h(4)s(1) + h(5)s(0) +$ $+ h(6)s(-1) + \dots = h(0)s(5) + h(1)s(4) + h(2)s(3) + h(3)s(2) + h(4)s(1) +$ $+ h(5)s(0) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 24$
6	$y(6) = h(0)s(6) + h(1)s(5) + h(2)s(4) + h(3)s(3) + h(4)s(2) + h(5)s(1) +$ $+ h(6)s(0) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 8$

Вычисление отсчетов реакции  $y(n), n = 0, 1, 2, \dots$  по формуле свертки можно представить как вычисление сумм локальных произведений двух последовательностей – импульсной характеристики и воздействия. При этом одна из последовательностей фиксирована, а другая зеркально отображается относительно оси ординат и затем скользит слева направо по оси времени.

### 2.2.3. Циклическая свертка

Циклическая свертка определяется для периодических последовательностей длины  $N$  выражением [8]:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l)s(n-l), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

В силу периодичности последовательностей номера отсчетов берутся по модулю  $N$ , поэтому  $s(-n) = s(N-n)$ ,  $h(-n) = h(N-n)$ . Матричная запись циклической свертки имеет вид:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(N-1) \\ h(1) & h(2) & \dots & \dots & \dots & h(0) \\ h(2) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(N-1) & h(0) & \dots & \dots & \dots & h(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(N-1) \\ s(N-2) \\ \vdots \\ s(1) \end{bmatrix}.$$

Пример. Вычисление трехточечной циклической свертки:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0)s(0) + h(1)s(2) + h(2)s(1); \\ y(1) &= h(1)s(0) + h(0)s(2) + h(2)s(1); \\ y(2) &= h(2)s(0) + h(1)s(2) + h(0)s(1). \end{aligned}$$

### 2.2.4. Вычисление сверток при помощи дискретных преобразований

Согласно теореме о свертке для преобразования Фурье, спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей. Поскольку все рассмотренные преобразования обладают аналогичными свойствами, то их можно объединить понятием обобщенного преобразования Фурье. Тогда свертка двух векторов [8]:

$$S = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T, \quad H = [h(0), h(1), \dots, h(N-1)]^T, \\ y(n) = ДПФ^{-1}(ДПФ\{s(n)\} \cdot ДПФ\{h(n)\}).$$

Таким образом, для получения свертки следует выполнить следующие действия:

- 1) найти преобразования Фурье (обобщенные спектры) входных последовательностей;
- 2) вычислить поточечное произведение этих последовательностей;
- 3) вычислить обратное преобразование Фурье от произведения спектров.

Может показаться, что такой метод вычисления свертки довольно сложен, он тем не менее позволяет во многих случаях сократить объем вычислений. Это происходит вследствие того, что для выполнения БПФ существуют быстрые алгоритмы с числом операций, пропорциональным  $N \log_2 N$ . Для многих приложений один из векторов (например,  $H$ ) известен заранее, что позволяет предварительно вычислить спектр  $H$ . В этом случае вычисление свертки заключается в выполнении двух быстрых преобразований и перемножении  $N$  чисел. Для БПФ это циклические свертки, для преобразования Адамара вычисляется диадная свертка.

Для вычисления линейной свертки двух последовательностей длины  $N_1$  и  $N_2$  исходные данные последовательности следует дополнить нулевыми отсчетами так, чтобы их длина стала равной  $N_1 + N_2 - 1$ , и рассматривать как периодические.

Пример. Вычислить линейную свертку последовательностей  $S = [2, -2, 1]^T$  и  $H = [1, 2]^T$ .

Так как  $N_1 = 3$  и  $N_2 = 2$ , то  $N_1 + N_2 - 1 = 4$ , следует вычислить циклическую свертку последовательностей  $S' = [2, -2, 1, 0]^T$  и  $H = [1, 2, 0, 0]^T$ .

Прямые преобразования Фурье последовательностей равны:

$$F_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2j \\ 5 \\ 1-2j \end{bmatrix},$$

$$F_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1-2j \\ -1 \\ 1+2j \end{bmatrix}.$$

Поточечное произведение спектров:

$$F_h \cdot F_s = \begin{bmatrix} 3 \\ 1-2j \\ -1 \\ 1+2j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2j \\ 5 \\ 1-2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 \\ (1-2j)(1+2j) \\ -1 \cdot 5 \\ (1+2j)(1-2j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование Фурье дает значения свертки:

$$Y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

В тех случаях, когда одна последовательность намного длиннее другой, используют разбиение длинной последовательности на короткие секции. Затем вычисляются короткие свертки и из них формируется конечный результат. Такая ситуация встречается в цифровой фильтрации, когда фильтруемые последовательности намного длиннее по сравнению с короткой импульсной характеристикой.

Существует два метода секционирования – метод перекрытия с суммированием и метод перекрытия с накоплением. Предположим, что более длинной является последовательность  $s(n)$ . Она разбивается на блоки по  $N$  отсчетов. Последовательность  $h(n)$  имеет длину  $L$ . Линейная свертка каждого из блоков последовательности  $s(n)$  с последовательностью  $h(n)$  имеет размер  $N + L - 1$  и перекрывается со сверткой следующего блока в  $L - 1$  отсчетах. Поэтому на участке перекрытия их отсчеты следует сложить. Таким образом, на каждые  $L$  входных отсчетов вычисляется  $N + L - 1$ -точечная циклическая свертка и выполняется  $L$  – сложений.

В методе перекрытия с накоплением длинная последовательность  $s(n)$  разбивается на секции по  $N$  отсчетов так, что соседние секции перекрываются в  $L - 1$  отсчетах. Последовательность  $h(n)$  дополняется нулевыми значениями до длины  $N$ , и вычисляются циклические свертки каждой секции с дополненной последовательностью  $h(n)$ . Первые  $L - 1$  отсчетов каждой секционной свертки отбрасываются, а остальные присоединяются к оставшимся отсчетам предыдущей секции. Алгоритм перекрытия с накоплением дает  $N - l + 1$  отсчетов свертки без дополнительного суммирования, поэтому его реализация проще.

Если длина блока увеличивается, то общее количество блоков уменьшается. При этом число преобразований становится меньше, но время выполнения каждого преобразования возрастает. С другой стороны, сокращение длины блока потребует большего числа коротких преобразований, поэтому существует оптимум между длиной блока  $N$  и длиной короткой последовательности  $L$ .

### 2.2.5. Корреляция

При решении ряда практических задач необходимо определять степень сходства сигналов, например, при обнаружении одного сигнала в другом. Для надежного обнаружения перекрывающихся сигналов и сигналов смеси с шумом применяется метод корреляции.

Пусть датчик генерирует сигнал  $s(n)$ , и мы хотим обнаружить в нем последовательность  $g(n)$  некоторой конечной длины. Для поиска этой последовательности вычисляются скалярные произведения сигналов  $s(t+n)$  и  $g(n)$  для различных  $t$ . Таким образом, необходимо «приложить» искомый сигнал во всех возможных положениях к сигналу с датчика и найти их «степень похожести» (скалярное произведение) для каждого положения. Таким образом, на выходе формируется сигнал  $r(t)$ , показывающий, насколько сигнал с датчика  $s(n)$  в позиции  $t$  похож на искомый сигнал  $g(n)$ .

Смысл сигнала  $r(t)$  в том, что его величины для каждого  $n$  показывают, насколько входной сигнал в позиции  $k$  похож на искомый сигнал. Если во входном сигнале присутствует только шум, то и значения корреляции будут шумом небольшой амплитуды. Но как только в шуме входного сигнала появится форма, похожая на искомый сигнал, так значение корреляции в этой точке станет высоким.

Корреляцию можно вычислять как свертку, положив в качестве ядра свертки искомый сигнал, развернутый относительно нулевой точки. Иногда корреляцию называют кросс-корреляцией или перекрестной корреляцией. Термин «автокорреляция» применяется, когда находится корреляция сигнала с самим собой. Смысл этой операции в том, чтобы найти наиболее вероятные периоды повторения формы исходного сигнала.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) разных сигналов описывает как степень сходства формы двух сигналов, так и их взаимное расположение друг относительно друга по координате (независимой переменной).

Автокорреляционные функции (АКФ) сигналов. АКФ сигнала  $s(n)$ , является количественной характеристикой формы сигнала, и определяется суммой от произведения двух копий сигнала  $s(n)$ , сдвинутых относительно друг друга. АКФ является скалярным произведением сигнала и его копии в функциональной зависимости от переменной величины значения сдвига  $t$ .

Для вычисления корреляции в основном используют два подхода.



1. *Прямой метод.* Вычисление корреляции двух сигналов выполняется во временной области и в данном случае выполняется векторно-матричное произведение входного вектора на матрицу, строки которой представляют собой всевозможные сдвиги исходного сигнала. Соответствующее матричное представление имеет вид [8]:

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & g(1) & \cdot & \cdot & \cdot & g(N-1) \\ g(N-1) & g(0) & \cdot & \cdot & \cdot & g(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g(1) & g(2) & \cdot & \cdot & \cdot & g(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s(N-1) \end{bmatrix}.$$

2. *Вычисление корреляции на основе двукратных преобразований.* Процедура отыскания корреляции двух сигналов выполняется в частотной области, используя свойство:

$$\begin{aligned} r(n) &= \text{ДПФ}^{-1}(\text{ДПФ}\{s(n)\} \cdot \text{ДПФ}^*\{g(n)\}) = \\ &= \text{ДПФ}^{-1}(\text{ДПФ}^*\{s(n)\} \cdot \text{ДПФ}\{g(n)\}). \end{aligned}$$

Таким образом, для получения корреляции следует выполнить следующие действия:

- 1) найти преобразования Фурье (обобщенные спектры) исходных последовательностей;
- 2) вычислить поточечное произведение этих последовательностей, причем одна из них должна быть взята в комплексно-сопряженной форме;
- 3) вычислить обратное преобразование Фурье от произведения спектров.

При вычислении корреляции можно добиться значительного сокращения вычислительных затрат, применяя быстрые алгоритмы дискретных преобразований.

### 2.3. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье

Вычисление дискретного преобразования Фурье требует выполнения  $N^2$  умножения и  $N(N-1)$  операций сложения для сигнала длины  $N$ . Существует способ снизить вычислительную сложность до величины порядка  $N \log_2 N$ . Этот способ называется быстрым преобразованием Фурье (БПФ, FFT(fast Fourier transform)). Он основан на том, что среди множителей есть

много повторяющихся значений (в силу, например, своей периодичности). Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями, значительно сокращая число умножений. В результате быстроедействие БПФ может в зависимости от  $N$  в сотни раз превосходить быстроедействие стандартного алгоритма. При этом алгоритм БПФ является точным. Он даже точнее стандартного, т. к. сокращая число операций, он приводит к меньшим ошибкам округления.

Однако у большинства алгоритмов БПФ есть особенность [11]: они способны работать лишь тогда, когда длина анализируемого сигнала  $N$  является степенью двойки. Обычно это не представляет большой проблемы, так как анализируемый сигнал всегда можно дополнить нулями до необходимого размера. Число  $N$  называется размером или длиной БПФ (FFT size).

Наибольшее распространение получил алгоритм БПФ с основанием 2, известный как алгоритм БПФ Кули-Тьюки (по имени разработчиков) и впервые опубликованный в 1965 году в США. Существуют два эквивалентных по эффективности алгоритма БПФ с основанием 2: с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте.

### **2.3.1. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени**

Основная идея алгоритма БПФ с прореживанием по времени заключается в поэтапном вычислении  $N$ -точечного ДПФ ( $N = 2^v$ ) на  $v$  этапах, на каждом из которых текущее ДПФ определяется как комбинация ДПФ вдвое меньшей размерности.

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени в общем виде представляется [11]:

- задание начальных условий: отсчеты  $N$ -точечной последовательности расставляются по определенному правилу;
- на первом этапе определяется 2-точечное ДПФ каждой пары отсчетов последовательности;
- на втором этапе определяются 4-точечные ДПФ как комбинация 2-точечных ДПФ;
- на  $i$ -ом этапе определяются  $2^i$ -точечные ДПФ как комбинация  $2^{i-1}$ -точечных ДПФ;
- на  $(v - 1)$ -ом этапе определяются  $N/2$ -точечные ДПФ как комбинация  $N/4$ -точечных ДПФ;
- на  $v$ -ом (последнем) этапе определяется искомое  $N$ -точечное ДПФ как комбинация  $N/2$ -точечных ДПФ, отсчеты ДПФ следуют в естественном порядке  $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$ .

Таким образом, для реализации алгоритма БПФ необходимо знать правило начальной расстановки отсчетов  $N$ -точечной последовательности и общую формулу расчета ДПФ для произвольного  $i$ -го этапа.

Получить их можно следующим образом [11].

Начальные условия одноэтапного алгоритма БПФ формируются в результате однократного разбиения исходной  $N$ -точечной последовательности на две  $N/2$ -точечные, выделив отдельно четные и нечетные отсчеты:

$$\begin{aligned}\{s(2n)\} &= \{s(0), s(2), \dots, s(N-2)\}; \\ \{s(2n+1)\} &= \{s(1), s(3), \dots, s(N-1)\}.\end{aligned}$$

Таким образом, начальная расстановка отсчетов производится по правилу –  $N/2$  четных отсчетов,  $N/2$  нечетных отсчетов:

$$\{s(0), s(2), \dots, s(N-2); s(1), s(3), \dots, s(N-1)\}.$$

Это позволяет разбить сумму в ДПФ на две:

$$\begin{aligned}f(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n+1)W_N^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n)W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n+1)W_N^{2nk}, k = 0, 1, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Представим поворачивающий множитель  $W_N^{2nk}$  в виде:

$$W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk}.$$

ДПФ можно записать как:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n)W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n+1)W_{N/2}^{nk}, k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Анализ выражения показывает, что каждая из сумм представляет собой  $N/2$ -точечное ДПФ: первая сумма – ДПФ последовательности четных отсчетов, а вторая – нечетных. Причем каждое из  $N/2$ -точечных ДПФ определяется при  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Используем обозначения:

$$f_0^v(k) = f(k),$$

$$f_0^{v-1}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n)W_{N/2}^{nk},$$

$$f_1^{v-1}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2n+1)W_{N/2}^{nk},$$

где *верхний* индекс – указывает номер этапа алгоритма БПФ;

*нижний* – номер ДПФ, четный (четное ДПФ) и нечетный (нечетное ДПФ).

С учетом введенных обозначений ДПФ, можно рассчитать  $N$ -точечное ДПФ, оно определяется как комбинация двух  $N/2$ -точечных ДПФ – четного  $f_0^{v-1}(k)$  и нечетного  $f_1^{v-1}(k)$ :

$$f^v(k) = f_0^{v-1}(k) + W_N^k f_1^{v-1}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$N/2$ -точечные ДПФ  $f_0^{v-1}(k)$  и  $f_1^{v-1}(k)$  – периодические функции переменной  $k$  с периодом  $N/2$ , нет необходимости определять их при  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , достаточно только определить их при  $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , а затем повторить при  $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$ , т. е.:

$$f_0^{v-1}(k) = f_0^{v-1}(k + \frac{N}{2}), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1;$$

$$f_1^{v-1}(k) = f_1^{v-1}(k + \frac{N}{2}), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Поворачивающий множитель при  $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$  равен

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-j\frac{2\pi N}{N} \frac{N}{2}} = -W_N^k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Следовательно, и его достаточно определить при  $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , а затем, изменив знак, повторить при  $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$ .

Рассмотренные свойства позволяют представить ДПФ в виде:

$$\begin{cases} f_0^v(k) = f_0^{v-1}(k) + W_N^k f_1^{v-1}(k); \\ f_0^v(k + \frac{N}{2}) = f_0^{v-1}(k) - W_N^k f_1^{v-1}(k); \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Анализ полученного выражения показывает, что расчет ДПФ упрощается за счет распараллеливания вычислений при  $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$  и  $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1$  по верхней и нижней формулам соответственно.

Если алгоритм БПФ состоит из двух,  $v$ -го и  $(v - 1)$ -го этапов, то начальные условия алгоритма формируются в результате последовательного двукратного разбиения  $N$ -точечной последовательности: сначала  $N$ -точечная последовательность разбивается на две  $N/2$ -точечные, а затем каждая из этих последовательностей вновь разбивается на две  $N/4$ -точечные – четных и нечетных отсчетов по порядку их следования, считая от нуля:

- $N/2$ -точечная последовательность четных отсчетов, полученная для БПФ, состоящего из одного этапа, разбивается на две  $N/4$ -точечные последовательности четных и нечетных отсчетов:

$$\begin{aligned} &\{s(0), s(4), \dots, s(N - 4)\}, \\ &\{s(2), s(6), \dots, s(N - 2)\}; \end{aligned}$$

- $N/2$ -точечная последовательность нечетных отсчетов, полученная для БПФ, состоящего из одного этапа, разбивается на две  $N/4$ -точечные последовательности четных и нечетных отсчетов:

$$\begin{aligned} &\{s(1), s(5), \dots, s(N - 3)\}, \\ &\{s(3), s(7), \dots, s(N - 1)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, начальная расстановка отсчетов производится по правилу:

$$\begin{aligned} &\{s(0), s(4), \dots, s(N - 4); s(2), s(6), \dots, s(N - 2)\}, \\ &\{s(1), s(5), \dots, s(N - 3); s(3), s(7), \dots, s(N - 1)\}. \end{aligned}$$

На  $(v - 1)$ -м этапе определяются два  $N/2$ -точечных ДПФ, причем каждое из них – как комбинация двух  $N/4$ -точечных ДПФ:

- $N/2$ -точечное ДПФ  $f_0^{v-1}(k)$  – как комбинация  $N/4$ -точечных ДПФ – четного  $f_0^{v-2}(k)$  и нечетного  $f_1^{v-2}(k)$ ;
- $N/2$ -точечное ДПФ  $f_1^{v-1}(k)$  – как комбинация  $N/4$ -точечных ДПФ – четного  $f_2^{v-2}(k)$  и нечетного  $f_3^{v-2}(k)$ .

$N/2$ -точечные ДПФ  $f_0^{v-1}(k)$  и  $f_1^{v-1}(k)$  определяются по формуле (2.6), в которой индекс  $v$  уменьшается на единицу, а размерности ДПФ и поворачивающего множителя понижаются вдвое, следовательно два  $N/2$ -точечных ДПФ  $f_0^{v-1}(k)$  и  $f_1^{v-1}(k)$  определяются:

$$\begin{cases} f_0^{v-1}(k) = f_0^{v-2}(k) + W_{N/2}^k f_1^{v-2}(k), \\ f_0^{v-1}(k + \frac{N}{4}) = f_0^{v-2}(k) - W_{N/2}^k f_1^{v-2}(k), \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1^{v-1}(k) = f_2^{v-2}(k) + W_{N/2}^k f_3^{v-2}(k), \\ f_1^{v-1}(k + \frac{N}{4}) = f_2^{v-2}(k) - W_{N/2}^k f_3^{v-2}(k), \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1. \end{cases}$$

На  $v$ -м этапе  $N$ -точечное ДПФ  $f_0^v(k)$  определяется как комбинация  $N/2$ -точечных ДПФ.

Если алгоритм БПФ состоит из трех,  $v$ -го,  $(v - 1)$ -го и  $(v - 2)$ -го этапов, то аналогично начальные условия формируются а результате трехкратного разбиения  $N$ -точечной последовательности, на  $(v - 1)$ -м этапе каждое из четырех  $N/4$ -точечных ДПФ определяется по формуле (2.6), в которой индекс  $v$  уменьшается на два, а размерности ДПФ и поворачивающего множителя понижаются в 4 раза на  $(v - 1)$ -м и  $v$ -м этапах два  $N/2$ -точечных и  $N$ -точечное ДПФ определяются согласно двухэтапному алгоритму. Подобный подход можно применить и для  $v$ -этапного алгоритма БПФ с прореживанием по времени.

Начальные условия формируются в результате  $v$ -кратного разбиения  $N$ -точечной последовательности, а сформированная последовательность называется прореженной по времени.

Процедура многократного прореживания приводит к тому, что исходные данные располагаются не в естественном, а в бит-реверсивном порядке.

Например, для  $N = 8$  естественный и бит-реверсивный порядок расположения отчетов запишется следующим образом:

Естественный порядок	Бит-реверсивный порядок
000(0)	000(0)
001(1)	100(4)
010(2)	010(2)
011(3)	110(6)
100(4)	001(1)
101(5)	101(5)
110(6)	011(3)
111(7)	111(7)

Общая формула расчета ДПФ на произвольной  $i$ -м этапе, полученная на основе (2.6), имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_m^i(k) = f_{2m}^{i-1}(k) + W_L^k f_{2m+1}^{i-1}(k); \\ f_m^i(k + \frac{L}{2}) = f_{2m}^{i-1}(k) - W_L^k f_{2m+1}^{i-1}(k); \\ i = 1, 2, \dots, v; \\ m = 0, 1, \dots, M - 1; \\ k = 0, 1, \dots, \frac{L}{2} - 1; \end{array} \right. \quad (2.7)$$

где  $i$  – номер этапа;

$m$  – номер ДПФ;

$k$  – номер отсчета ДПФ;

$M$  – количество  $L$ -точечных ДПФ:

$$M = \frac{N}{2^i} = \frac{2^v}{2^i} = 2^{v-i}; \quad (2.8)$$

$L$  – размерность ДПФ:

$$L = 2^i; \quad (2.9)$$

$f_m^i(k)$  –  $L$ -точечное ДПФ;

$f_{2m}^{i-1}(k)$ ,  $f_{2m+1}^{i-1}(k)$  – четное и нечетное  $L/2$ -точечное ДПФ соответственно.

Согласно (2.7),  $L$ -точечное ДПФ определяется параллельно: первая половина отсчетов  $L$ -точечного ДПФ – по верхней формуле; вторая половина отсчетов  $L$ -точечного ДПФ – по нижней формуле.

Для *первого* этапа алгоритма ( $i = 1$ ) по формуле (2.9) размерность  $L$  ДПФ равна:

$$L = 2^1 = 2,$$

а по формуле (2.8) – количество 2-точечных ДПФ:

$$M = 2^{v-i} = 2^{v-1} = \frac{N}{2}.$$

Общая формула для ДПФ:

$$\begin{cases} f_m^1(0) = f_{2m}^0(0) + W_2^0 f_{2m+1}^0(0); \\ f_m^1(1) = f_{2m}^0(0) - W_2^0 f_{2m+1}^0(0); \end{cases} \quad (2.10)$$

где поворачивающий множитель  $W_2^0 = 1$  сохранен для единообразия с общей формулой (2.7). В правой части (2.10) согласно принятым обозначениям  $f_{2m}^0(0)$  и  $f_{2m+1}^0(0)$  – отсчеты ДПФ нулевого этапа ( $i = 0$ ), однако такого этапа нет, поэтому для вычисления 2-точечных ДПФ по общей формуле (2.7) перед выполнением первого этапа задаются начальные условия: каждой паре отсчетов ДПФ четному и нечетному присваивают значения пары отсчетов прореженной последовательности четного и нечетного отсчетов соответственно:

$$\begin{cases} f_{2m}^0(0) = \tilde{s}_{2m}, \\ f_{2m+1}^0(0) = \tilde{s}_{2m+1}, \end{cases} \quad (2.11)$$

где  $\tilde{s}_{2m}$  и  $\tilde{s}_{2m+1}$  – условные обозначения четного и нечетного отсчетов 2-точечной последовательности, полученные в результате  $v$ -кратного разбиения исходной  $N$ -точечной последовательности.

Выражение (2.7) показывает, что алгоритм БПФ с прореживанием по времени представляет собой  $v$ -этапную процедуру типа «цикл в цикле», где [11]:

- внешний цикл организуется по переменной  $i$ :  $i = 1, 2, \dots, v$ ;
- первый внутренний цикл (при фиксированном  $i$ ) – по переменной  $m$ :  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ ;
- второй внутренний цикл (при фиксированных  $i$  и  $m$ ) – по переменной  $k$ :  $k = 0, 1, \dots, (L/2 - 1)$ . В цикле вычисляется  $k$ -й отсчет  $L$ -точечного ДПФ по формуле (2.7).



На выходе алгоритма БПФ с прореживанием по времени определяется  $N$ -точечное ДПФ, отсчеты которого следуют в естественном порядке:  $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$ .

Основной операцией алгоритма БПФ, называемой базовой, является одновременное (параллельное) вычисление двух отсчетов ДПФ –  $k$ -го и  $(k + L/2)$ -го по двум верхним формулам (2.7). На рис. 2.7 приведен направленный граф базовой операции, получивший название «бабочка» по ассоциации с изображением графа. Кругок обозначает арифметическую операцию сложения/вычитания, верхний выход соответствует сумме, а нижний – разности; стрелка обозначает операцию умножения на поворачивающий множитель, стоящий над ней.

Алгоритм БПФ обычно представляют в виде направленного графа – совокупности «бабочек»:

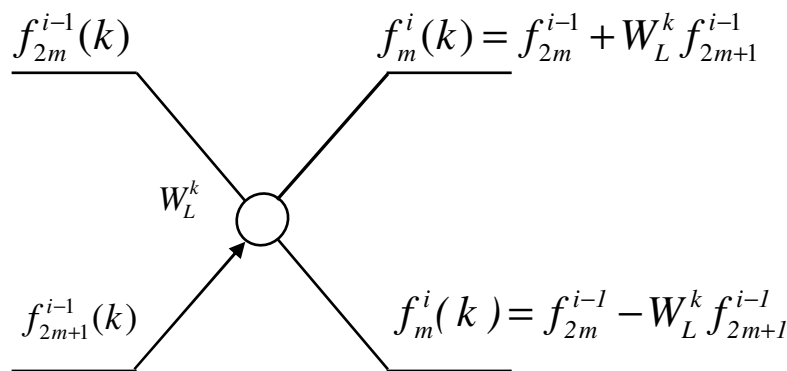


Рис. 2.7. Граф базовой операции алгоритма БПФ с прореживанием по времени

Количество «бабочек» т. е. базовых операций алгоритма, на любом  $i$ -м этапе одинаково: согласно (2.7), на  $i$ -м этапе при фиксированном значении  $m$  и  $k = 0, 1, \dots, L/2$  требуется  $L/2$  «бабочек», следовательно, при  $m = 0, 1, \dots, (M - 1)$  необходимо  $ML/2$  «бабочек». Количество «бабочек» на любом  $i$ -м этапе определяется как:

$$M \frac{L}{2} = 2^{v-i} \frac{2^i}{2} = \frac{N}{2}.$$

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени традиционно рассматривается на примере вычисления 8-точечного ДПФ для  $N = 2^v = 2^3 = 8$ ,  $v = 3$ .

Алгоритм БПФ представляет собой трехэтапную процедуру определения ДПФ по общей формуле (2.7) при  $i = 1, 2, 3$ . Начальные условия

алгоритма формируются в результате трехкратного разбиения исходной 8-точечной последовательности на четные и нечетные отсчеты и представляются в двоично-инверсном порядке:

$$\{s(0), s(4), s(2); s(6), s(1), s(5), s(3), s(7)\}.$$

На нулевом этапе каждой паре отсчетов ДПФ – четному  $f_{2m}^0(0)$  и нечетному  $f_{2m+1}^0(0)$  при  $m = 0, 1, 2, 3$  присваиваются значения четного и нечетного отсчетов прореженной 8-точечной последовательности.

На первом этапе, ( $i = 1$ ), определяются четыре 2-точечных ДПФ при  $m = 0, 1, 2, 3$  с учетом начальных условий:

$$\begin{cases} f_0^1(0) = s(0) + W_2^0 s(4); \\ f_0^1(1) = s(0) - W_2^0 s(4); \end{cases} \quad \begin{cases} f_1^1(0) = s(2) + W_2^0 s(6); \\ f_1^1(1) = s(2) - W_2^0 s(6); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2^1(0) = s(1) + W_2^0 s(5); \\ f_2^1(1) = s(1) - W_2^0 s(5); \end{cases} \quad \begin{cases} f_3^1(0) = s(3) + W_2^0 s(7); \\ f_3^1(1) = s(3) - W_2^0 s(7). \end{cases}$$

Поворачивающий множитель в данном случае  $W_2^0 = 1$ .

На втором этапе ( $i = 2$ ) определяются два 4-точечных ДПФ при  $m = 0, 1$ :

$$\begin{cases} f_0^2(k) = f_0^1(k) + W_4^k f_1^1(k); \\ f_0^2(k+2) = f_0^1(k) - W_4^k f_1^1(k); \\ k = 0, 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1^2(k) = f_2^1(k) + W_4^k f_3^1(k); \\ f_1^2(k+2) = f_2^1(k) - W_4^k f_3^1(k); \\ k = 0, 1. \end{cases}$$

На третьем этапе ( $i = 3$ ) определяется 8-точечное ДПФ при  $m = 0$ :

$$\begin{cases} f_0^3(k) = f_0^2(k) + W_8^k f_1^2(k); \\ f_0^3(k+4) = f_0^2(k) - W_8^k f_1^2(k); \\ k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Полученные отсчеты восьмиточечного ДПФ следуют в естественном порядке.

Граф восьмиточечного БПФ с прореживанием по времени показан на рис. 2.8.

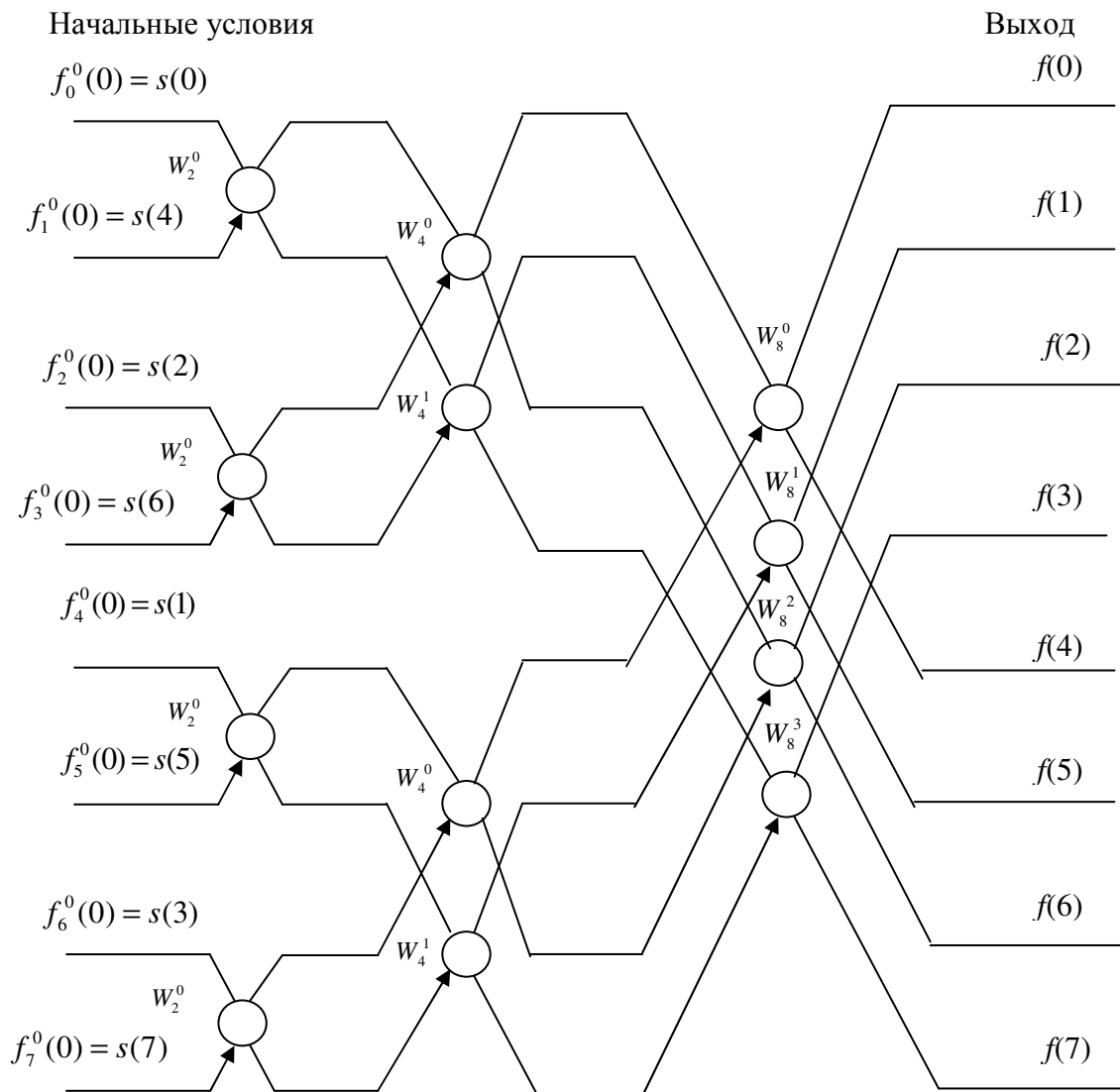


Рис. 2.8. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для восьмиточечного ДПФ

### 2.3.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Основная идея алгоритма БПФ с прореживанием по частоте заключается в поэтапном вычислении  $N$ -точечного ДПФ по  $\nu$  этапам, на каждом из которых ДПФ определяется через ДПФ вдвое большей размерности [11].

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте в общем случае требует выполнения следующих итераций:

- задание начальных условий – естественный порядок следования отсчетов входных отсчетов;

- на первом этапе определяются  $N/2$ -точечные ДПФ  $N/2$ -точечных последовательностей (двух половин исходной последовательности);
- на втором этапе определяются  $N/4$ -точечные ДПФ как комбинация  $N/2$ -точечных ДПФ;

.....

- на  $i$ -ом этапе определяются  $2^{i-1}$ -точечные ДНФ как комбинация  $2^i$ -точечных ДПФ;

.....

- на  $v$ -ом (последнем) этапе определяются 2-точечные ДПФ как комбинация 4-точечных ДПФ. Выходные отсчеты ДПФ следуют в бит-реверсивном порядке двоичных номеров.

Анализ алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и частоте показывает, что общая формула расчета БПФ с прореживанием по частоте на произвольном  $i$ -м этапе может быть получена путем замены входа и выхода, а также обращения стрелки направленного графа – «бабочки» алгоритма БПФ с прореживанием по времени (рис. 2.9).

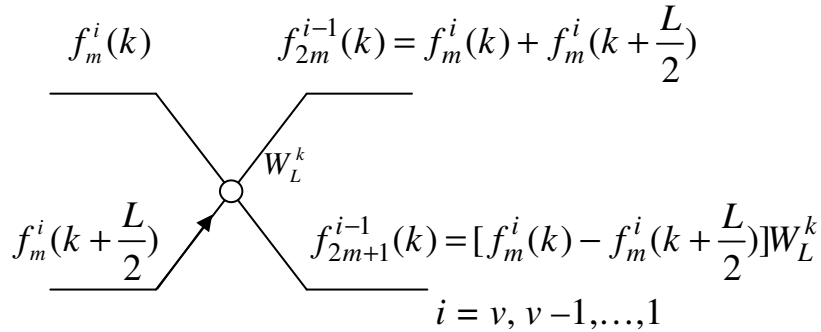


Рис. 2.9. Граф базовой операции алгоритма БПФ с прореживанием по частоте

Общая формула расчета ДПФ для произвольного  $i$ -го этапа [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{2m}^{i-1}(k) = f_m^i(k) + f_m^i(k + \frac{L}{2}); \\ f_{2m+1}^{i-1}(k) = [f_m^i(k) - f_m^i(k + \frac{L}{2})]W_L^k; \\ i = v, v-1, \dots, 1; \\ m = 0, 1, \dots, M-1; \\ k = 0, 1, \dots, \frac{L}{2}-1; \end{array} \right. \quad (2.12)$$

где  $i$  – номер этапа ( $i = v, v - 1, \dots, 1$ );

$m$  – номер ДПФ;

$k$  – номер отсчета ДПФ;

$M$  – количество ДПФ, определяемое по формуле  $M = 2^{v-i}$ ;

$L$  – размерное ДПФ, определяемое по формуле  $L = 2^i$ ;

$f_m^i(k)$  –  $L$ -точечное ДПФ;

$f_m^i(k), f_{2m+1}^{i-1}(k)$  – четное и нечетное  $L/2$ -точечное ДПФ соответственно.

Согласно (2.12),  $L$ -точечное ДПФ определяется параллельно:

- отсчеты *четного*  $L/2$ -точечного ДПФ – по *верхней* формуле;
- отсчеты *нечетного*  $L/2$ -точечного ДПФ – по *нижней* формуле.

Анализ выражения (2.12) описывает алгоритм БПФ с прореживанием по частоте –  $v$ -этапную процедуру типа «цикл в цикле», где:

- внешний цикл организуется по переменной  $i$ :  $i = v \dots 1$ ;
- первый внутренний цикл (при фиксированном  $i$ ) – по переменной  $m$ :  $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ;
- второй внутренний цикл (при фиксированных  $i$  и  $m$ ) – по переменной  $k$ :  $k = 0, 1, \dots, (L/2 - 1)$ . В цикле вычисляется  $k$ -й отсчет  $L/2$ -точечного ДПФ по формуле (2.12).

На выходе алгоритма (в результате вычислений при  $i = 1$  и  $L = 2^1 = 2$ ) согласно (2.12) получаем  $N$ -точечное ДПФ, отсчеты которого следуют в бит-реверсивном порядке двоичных номеров.

На практике алгоритм БПФ с прореживанием по частоте применяют реже, чем с прореживанием по времени, т. к. последний обеспечивает естественный порядок следования отсчетов ДПФ на выходе.

Как и в алгоритме с прореживанием по времени, в данном алгоритме вычислительные затраты составляют  $M \log_2 N$  операций сложения и  $0,5 M \log_2 N$  операций умножения, а вычисления можно выполнять с замещением. Величина «бабочки» по мере продвижения к концу вычислений уменьшается.

Если  $N = 8$ , алгоритм БПФ представляет собой трехэтапную процедуру вычисления ДПФ по общей формуле (2.12) при  $i = 3, 2, 1$ .

Начальные условия алгоритма задаются как:

$$\begin{cases} f_0^3(k) = s(k); \\ k = 0, 1, \dots, 7. \end{cases}$$

*Первый этап:*  $i = v = 3$ .

Определяются два 4-точечных ДПФ (по формуле 2.12) при  $m = 0$  с учетом начальных условий:

$$\begin{cases} f_0^2(k) = s(k) + s(k+4); \\ f_1^2(k) = [s(k) - s(k+4)]W_8^k; \\ k = 0, 1, \dots, 3. \end{cases}$$

*Второй этап:*  $i = v - 1 = 2$ .

Определяются четыре 2-точечных ДПФ при  $m = 0, 1$ :

$$\begin{cases} f_{2m}^1(k) = f_m^2(k) + f_m^2(k+2); \\ f_{2m+1}^1(k) = [f_m^2(k) - f_m^2(k+2)]W_4^k; \\ k = 0, 1. \end{cases}$$

*Третий этап:*  $i = v - 2 = 1$ .

Определяются 8-точечное ДПФ при  $m = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{cases} f_{2m}^0(0) = f_m^1(0) + f_m^1(1); \\ f_{2m+1}^0(0) = [f_m^1(0) - f_m^1(1)]W_2^0. \end{cases}$$

Значения  $f_{2m}^0(0)$  и  $f_{2m+1}^0(0)$  при  $m = 0, 1, 2, 3$  и есть искомое восьмиточечное ДПФ, отсчеты которого следуют в бит-реверсивном порядке двоичных номеров:

$$\begin{cases} f(0) = f_0^0(0); \\ f(4) = f_1^0(0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = f_2^0(0); \\ f(6) = f_3^0(0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1) = f_4^0(0); \\ f(5) = f_5^0(0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(3) = f_6^0(0); \\ f(7) = f_7^0(0). \end{cases}$$

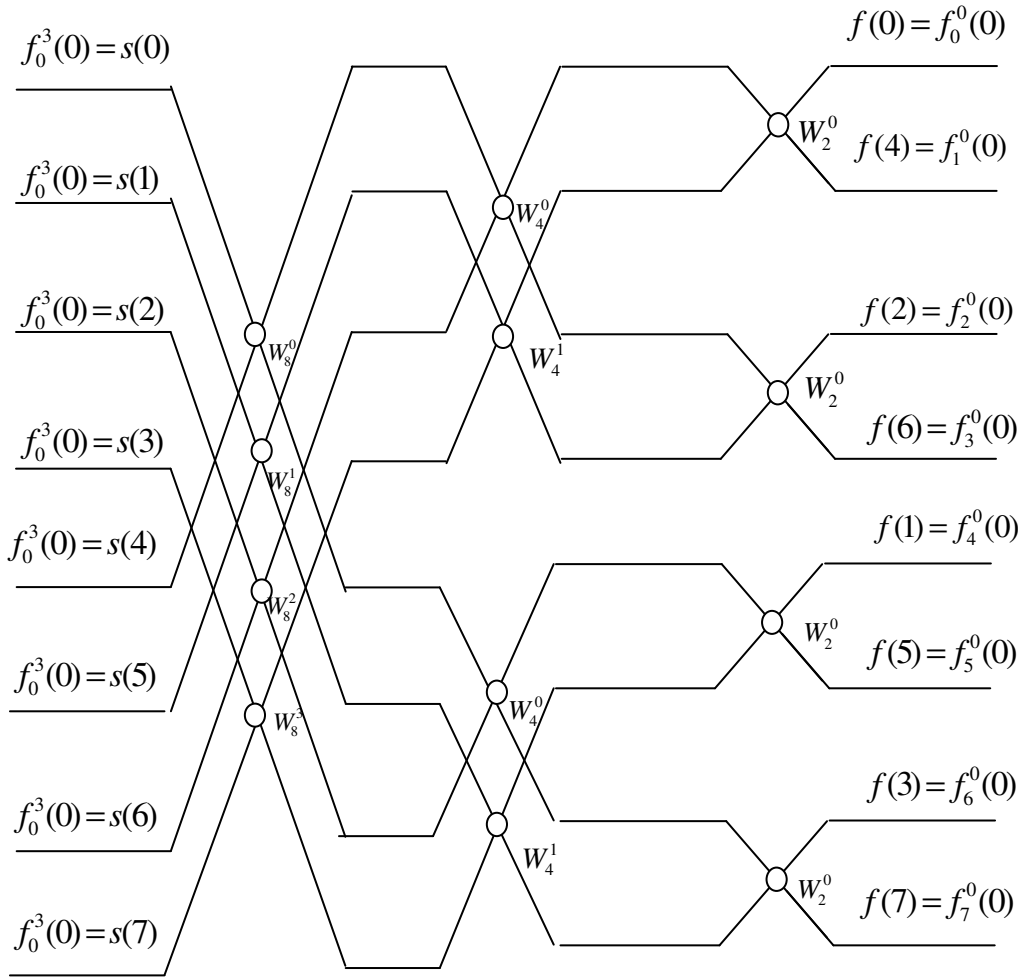


Рис. 2.10. Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для восьмиточечного ДПФ

### 2.3.3. Алгоритм действительного БПФ (АДБПФ)

Быстрый алгоритм для расчета ДПФ действительной  $N$ -точечной последовательности  $\{s(n)\}$  представлен в [7]. С целью снижения вычислительной сложности алгоритма БПФ с прореживанием по времени  $N$ -точечной действительной последовательности используют свойство эрмитовой симметрии спектральных коэффициентов ДПФ и весовых множителей:

$$\begin{aligned}
 f_k &= f_{N-k}^* \\
 f_k &= f_{N/2-k}^* \\
 w_N^k &= -\left(w_N^{N/2-k}\right)^*, \\
 k &= 1, \dots, N/4 - 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

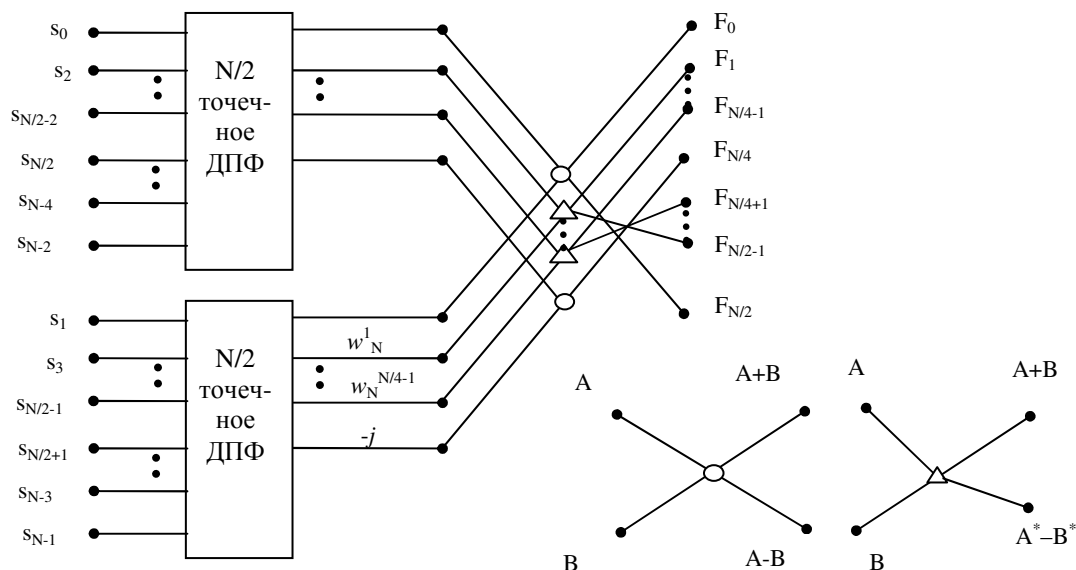


Рис. 2.11. Первый этап разложения в АДБПФ

Из соотношений (2.13) следует, что на этапе взвешивания достаточно выполнить только  $N/4 - 1$  комплексных умножений  $f_k = s_k W_N^k$  ( $k=1, \dots, N/4-1$ ), поскольку  $f_{N/2-k} = -f_k^*$ . Учитывая свойство (2.13), традиционная операция «бабочка» преобразуется в «модифицированную бабочку», которая помимо суммирования содержит операцию разности комплексно-сопряженных чисел. На рис. 2.11 представлен граф, иллюстрирующий разложение  $N$ -точечного ДПФ действительной последовательности на два  $N/2$ -точечных ДПФ с помощью алгоритма действительного быстрого преобразования Фурье (АДБПФ). Исходная последовательность  $\{s(n)\}$  ( $n=0, 1, \dots, N-1$ ) разделена по четным и нечетным отсчетам, а последовательность коэффициентов ДПФ  $f_k$  ( $k=0, 1, \dots, N/2$ ) расположена в прямом порядке. Каждый этап АДБПФ состоит из следующих операций (рис. 2.11):

1. Выполнение двух  $N/2$ -точечных ДПФ действительных последовательностей.
2. Выполнение  $N/4 - 1$  комплексных взвешиваний.
3. Вычисление  $N/2+1$  коэффициентов  $N$ -точечного ДПФ на основе  $N/4 - 1$  попарных сложений и вычитаний комплексных чисел и одного сложения и вычитания пары действительных чисел при выполнении двух базовых операций.

Для АДБПФ характерно:

1. Наличие обратной двоичной перестановки входной последовательности  $\{s(n)\}$  ( $n=0, 1, \dots, N-1$ ;  $N=2^v$ ).
2. Прямой порядок коэффициентов Фурье  $f_k$  ( $k=0, 1, \dots, N/2$ ) на выходе.
3. Рекурсивная структура, содержащая  $v$  этапов.



4. Два вида базовых операций: «бабочка» и «модифицированная бабочка», состоящая из операции суммирования двух комплексных чисел и разности двух комплексно-сопряженных чисел.

5. Выполнение  $(N/4 - 1)$  комплексных взвешиваний на  $W_N^k$  ( $k=1,...,N/4-1$ ) для каждого этапа АДБПФ.

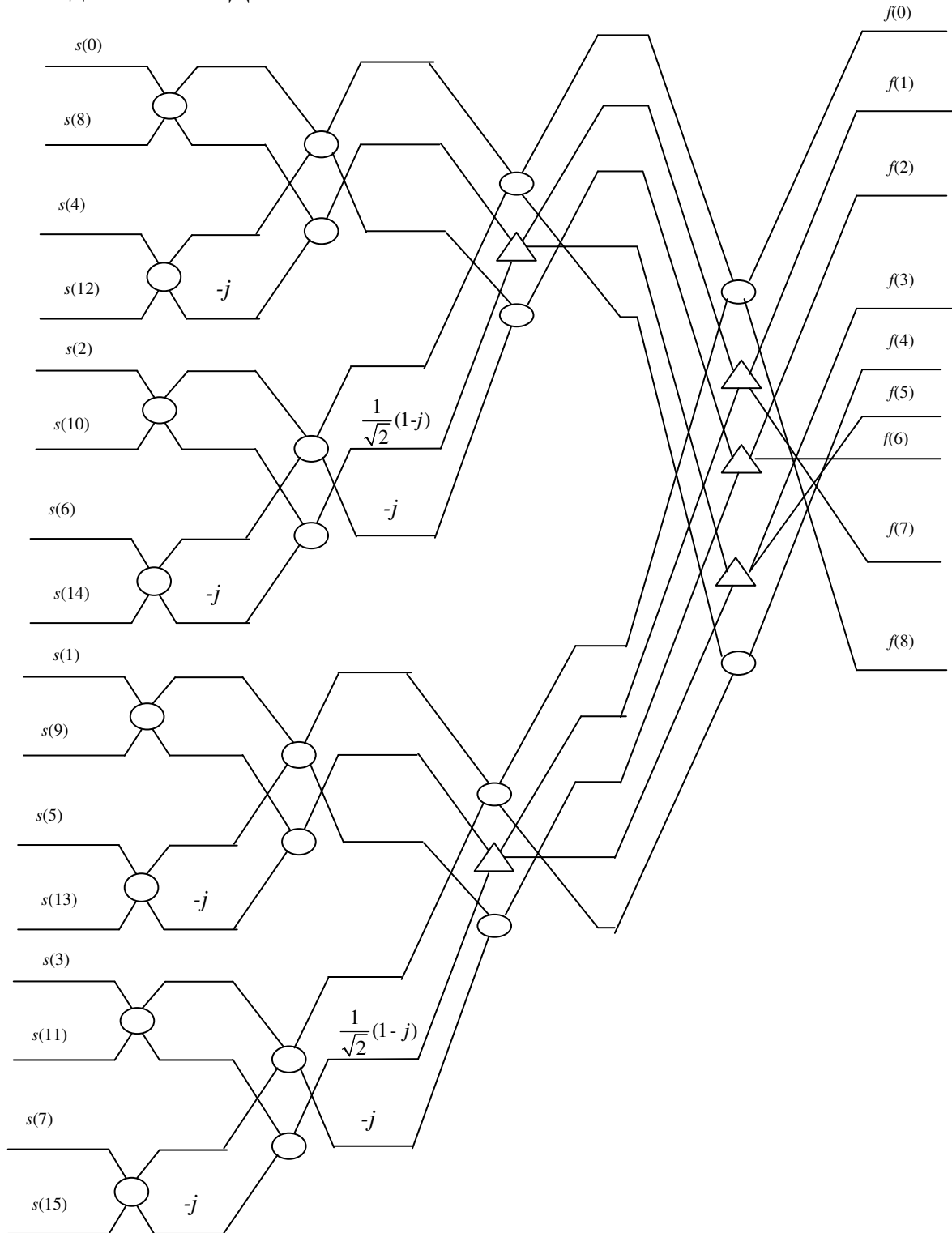


Рис. 2.12. Граф АДБПФ для  $N = 16$

## 2.4. Преобразование Уолша-Адамара

### 2.4.1. Функции Уолша

Функции Уолша образуют полную ортонормированную систему с количеством функций  $2^l$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ , и значениями  $\pm 1$  [8]. Число функций, включаемых в систему, обычно равно числу отсчетов каждой функции, так как при дискретном спектральном анализе сигналов с  $N$  отсчетами число спектральных составляющих также должно быть равно  $N$ . Поскольку нумерация (упорядочение) функций Уолша может быть произведена разными способами, то возможны различные системы функций Уолша. Наиболее широко используется представление таких систем в виде квадратных матриц, в которых каждая строка – это функция Уолша.

Адамар показал, что эти матрицы принадлежат классу матриц с максимально возможным определителем. Поэтому они получили название матриц Адамара [8].

Матрицей Адамара порядка  $N$  называется ортогональная матрица размером  $N \times N$ , элементами которой являются действительные числа « $\pm 1$ » [8]. Матрица Адамара порядка  $N$  обозначается  $H_N$ .

Простейшей матрицей Адамара является матрица второго порядка вида:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Если  $H_N$  – матрица Адамара порядка  $N$ , то матрица

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

является матрицей Адамара порядка  $2N$ .

Например, матрицы четвертого и восьмого порядка имеют соответственно следующий вид:

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

В более компактном виде матрицу Адамара можно представить:

$$H_8 = H_2 \otimes H_4,$$

где  $\otimes$  – знак прямого или кронекерова умножения матриц, которое вычисляется путем умножения каждого элемента матрицы  $H_4$  на матрицу  $H_2$ .

Для функций, принадлежащих системе Уолша-Адамара, используется обозначение  $had(k,n)$ , где  $k$ -номер строки, а  $n$  – номер столбца матрицы Адамара. Пронумеруем строки и столбцы матрицы Адамара двоичными числами от 0 до  $N-1$ . Тогда элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером  $k$  и столбца с номером  $n$ , вычисляется по формуле:

$$had(k,n) = (-1)^{(k \cdot n)},$$

где  $(k \cdot n) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i n_i$  – скалярное произведение векторов  $k$  и  $n$ ;

$k$  – двоичный номер строки;

$n$  – двоичный номер столбца.

Пусть  $k$  – двоичный номер строки, а  $n$  – двоичный номер столбца ( $k, n \in 0, \dots, N-1$ ). Тогда элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером  $k$  и столбца с номером  $n$ , вычисляется по формуле

$$had(k,n) = (-1)^{(kn)}, \quad (2.14)$$

где  $(kn) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i n_i$  – скалярное произведение векторов  $k$  и  $n$ .

Например, для матрицы  $H_8$  с учетом (2.14):

$$k = (k_2 \quad k_1 \quad k_0) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & .. & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{pmatrix} = n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} | \\ | \\ - & - & - & (-1)^{kn} & - & - & - & - & - \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} had(000,n) \\ had(001,n) \\ had(010,n) \\ had(011,n) \\ had(100,n) \\ had(101,n) \\ had(110,n) \\ had(111,n) \end{bmatrix}.$$

Строки матриц Адамара  $had(000,n), had(001,n), \dots, had(k,n)$  можно рассматривать как функции дискретных переменных  $n$  и  $k$ , определенные в целочисленных точках  $0, 1, 2, \dots, N-1$  интервала  $[0, N)$ . Эти функции называются дискретными функциями Уолша [8]. Первая переменная  $k$  обозначает номер функции, вторая переменная  $n$  – дискретное время. В качестве номера функции берется номер соответствующей строки матрицы Адамара. При этом говорят, что функции упорядочены по Адамару.

Важнейшими свойствами функций Уолша являются [8]:

1) ортогональность:

$$\sum_{n=0}^{N-1} had(k_1, n) had(k_2, n) = \begin{cases} N, k_1 = k_2; \\ 0, k_1 \neq k_2; \end{cases}$$

или в матричной записи:

$$H_N H_N^T = NI,$$

где  $I$  – единичная матрица;

2) симметричность:

$$H_N = H_N^T;$$

используя свойства ортогональности и симметричности, легко получить  $H^{-1} = N^{-1}H$ ;

3) мультипликативность по номеру функции:

$$had(k_1, n) had(k_2, n) = had(k_1 \oplus k_2, n)$$

и номеру отсчета:

$$had(k, n_1) had(k, n_2) = had(k, n_1 \oplus n_2).$$

Постоянная функция и функции меандрового типа с одной ненулевой позицией в двоичной записи номера называются функциями Радемахера. Для  $N = 8$  они равны:

$$R_0 = had(000, n); \quad R_2 = had(010, n);$$

$$R_1 = had(100, n); \quad R_3 = had(001, n).$$

Из свойства мультипликативности следует, что любая функция Уолша может быть получена перемножением функций Радемахера. Например:

$$had(011, n) = R_2 R_3;$$

$$had(110, n) = R_1 R_2.$$

В практических приложениях используется и другая нумерация функций, что соответствует другому способу ранжирования обобщенных гармоник. Наиболее употребительными из них являются упорядочения по Пэли и по Уолшу [8].

В некоторых практических приложениях, например в аналого-цифровых преобразованиях, желательно использовать коды, у которых все следующие друг за другом кодовые слова различаются только одной цифрой в некотором разряде. Коды, обладающие таким свойством, называются циклическими.

Очень важным циклическим кодом является код Грея. Двоичное представление числа может быть легко преобразовано в код Грея с помощью полусумматоров.

Пусть последовательность  $g_{n-1}, g_{n-2}, \dots, g_0$  является кодовым словом в  $n$  разрядном двоичном коде Грея, соответствующее двоичному числу  $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ .

Тогда  $g_i$  может быть определена согласно:

$$g_i = b_i \oplus b_{i+1}, \quad g_{n-1} = b_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Таблица 2.3

Трехразрядный код Грея

Десятичное число	Двоичный код			Код Грея		
	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$g_2$	$g_1$	$g_0$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	0
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	1	0	1
7	1	1	1	1	0	0

Система Пэли образуется из системы Адамара двоичной инверсией номеров функций, т. е. путем записи разрядов двоичного представления номера  $k$  в обратном порядке. Система Уолша располагает функции в порядке возрастания числа смен знака на интервале (по «частотам» следования) (рис. 2.13), что соответствует расположению их номеров в двоично-инверсном коде Грея.

Для  $N = 4$  в рассмотренных способах упорядочения строки расположены следующим образом:

по Адамару	по Пэли	по Уолшу
00	00	00
01	10	10
10	01	11
11	11	01

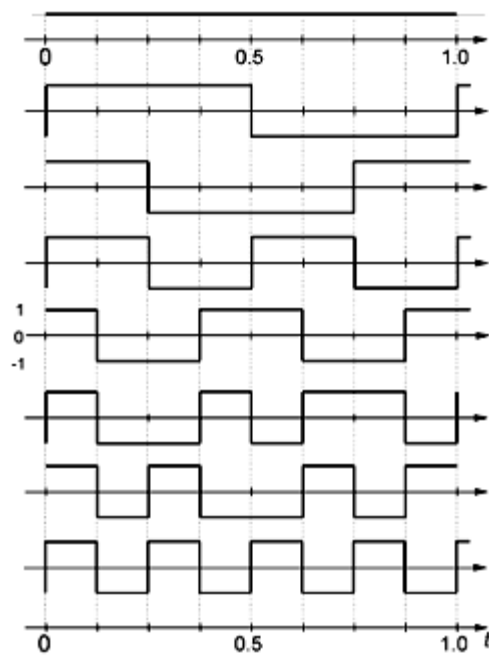


Рис. 2.13. Функции Уолша

Соответствующие матрицы при упорядочении по Пэли и по Уолшу равны:

$$P = \{pal(k, n)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \{wal(k, n)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

#### 2.4.2. Преобразование Уолша-Адамара и его свойства

Пусть  $\{s(n)\} = \{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\}$  – совокупность равноотстоящих отсчетов сигнала. Пара дискретного преобразования Уолша-Адамара в показательной форме представляется в виде [8]:

$$b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)(-1)^{(kn)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.15)$$

$$s(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} b(k)(-1)^{(kn)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

Равенство (2.15) называется *прямым преобразованием* и дает спектр сигнала в базисе Уолша. Равенство (2.16) называют *обратным преобразованием*.

Используя матрицу Адамара порядка  $N$ , можно записать преобразование в матричной форме:

$$B = HS ;$$

$$s = N^{-1}HB ,$$

где  $s = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ ,  $B = [b(0), b(1), \dots, b(N-1)]^T$  – векторы-столбцы отсчетов сигнала и спектральных коэффициентов соответственно.

Основными свойствами преобразования являются [8]:

1. *Линейность*. Если  $\{x(n)\}$  и  $\{y(n)\}$  – две последовательности со спектрами  $\{b_x(k)\}$  и  $\{b_y(k)\}$  соответственно, то спектр их взвешенной суммы  $\{z(n)\} = \{A_x(n)\} + \{B_y(n)\}$  равен:

$$\{b_z(k)\} = \{Ab_x(k)\} + \{Bb_y(k)\}.$$

2. *Инвариантность к диадному сдвигу*. Рассмотрим функцию  $s(n)$  дискретной переменной  $n$ . Функция  $s(n \oplus \tau)$  называется диадным сдвигом функции  $s(n)$ . Сущность диадного сдвига заключается в перестановке отсчетов исходной функции. В частности, на место отсчета с номером  $n$  ставится отсчет с номером  $(n \oplus \tau)$ . Например, пусть  $\{s(n)\} = \{0011\}$  и  $\tau = 2$ .

Значения  $(n \oplus \tau)$  для  $n = 0, 1, 2, 3$  равны:

$n$	$n \oplus \tau$
00	10
01	11
10	00
11	01

Из этой записи следует, что отсчет с номером ноль ставится на второй отсчет, а на место отсчета с номером один – третий и т. д. В результате получим:

$$\{s(n)\} = \{0011\};$$

$$\{s(n \oplus \tau)\} = \{1100\}.$$

Из свойств мультипликативности следует, что при фиксированном  $\tau$

$$had(k, n \oplus \tau) = had(k, n) had(k, \tau) = \pm had(k, n),$$

т. е. спектральные составляющие исходного и диадно-сдвинутого сигналов могут отличаться только знаком. Амплитудный же спектр при диадном сдвиге не меняется.

**3. Теорема о свертке и корреляции.** Понятие диадного сдвига позволяет обобщить понятия свертки и корреляционной функции. Так как суммирование и вычитание по модулю два совпадают, то диадная свертка совпадает с диадной корреляцией и определяется выражением

$$y(n) = r(n) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l)s(n \oplus l),$$

где  $n = 0, 1, \dots, (N-1)$ .

Теорема о свертке утверждает, что спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей:

$$b_y(k) = b_h(k)b_s(k).$$

Это позволяет для вычисления диадной свертки и корреляционной функции использовать преобразование Адамара:

$$R = H^{-1}(B_h B_s) = N^{-1}H(B_h B_s).$$

### 2.4.3. Быстрое преобразование Уолша-Адамара

Вычисление преобразования прямым способом требует выполнения  $N(N-1)$  операций сложения. Существуют быстрые алгоритмы, которые требуют только  $N \log_2 N$  операций.

Для построения быстрого алгоритма рассмотрим матричное равенство  $B = HS$ . Запишем в виде:

$$\begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b(\frac{N}{2}-1) \\ b(N/2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s(\frac{N}{2}-1) \\ s(N/2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s(N-1) \end{bmatrix},$$

что позволит отдельно вычислить первую и вторую половины спектра.



В результате:

$$\begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(\frac{N}{2}-1) \end{bmatrix} = H_{N/2} \begin{bmatrix} s(0) + s(N/2) \\ s(1) + s(N/2+1) \\ \vdots \\ s(\frac{N}{2}-1) + s(N-1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b(N/2) \\ b(\frac{N}{2}+1) \\ \vdots \\ b(N-1) \end{bmatrix} = H_{N/2} \begin{bmatrix} s(0) - s(N/2) \\ s(1) - s(N/2+1) \\ \vdots \\ s(\frac{N}{2}-1) - s(N-1) \end{bmatrix}$$

Из этих выражений следует, что вычисление  $N$ -точечного преобразования сводится к предварительному суммированию (вычитанию) входных данных и последующему вычислению двух  $N/2$ -точечных преобразований (рис. 2.14).

Процедуру снижения, размерности преобразования можно продолжить до получения двухточечного преобразования. Для этого потребуется  $\log_2 N$  шагов. На каждом шаге производится  $N$  сложений, поэтому общее количество операций сложения равно  $N \log_2 N$ . Рассмотренный алгоритм называется быстрым преобразованием Адамара (БПА). На рис. 2.15 приведен граф вычислительного процесса для  $N = 8$ . БПА принято также трактовать как разложение (факторизацию) матрицы Адамара в произведение слабозаполненных сомножителей.

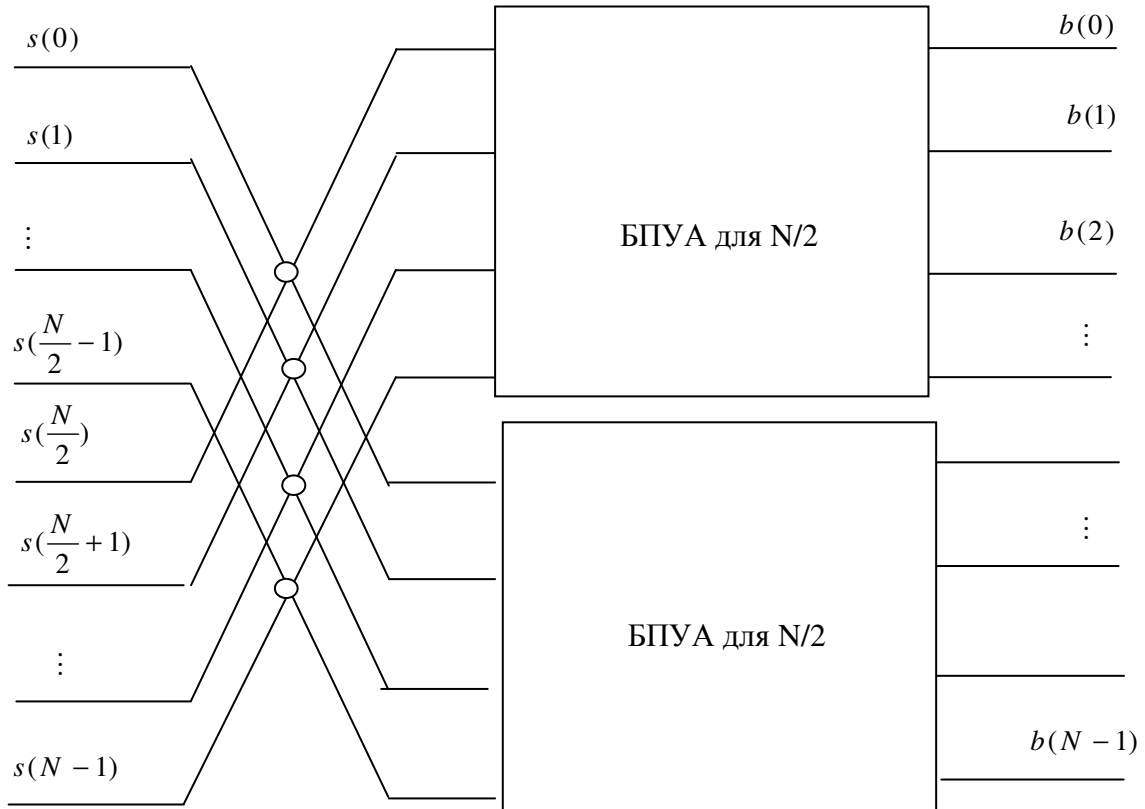


Рис. 2.14. Принцип построения алгоритма БПА

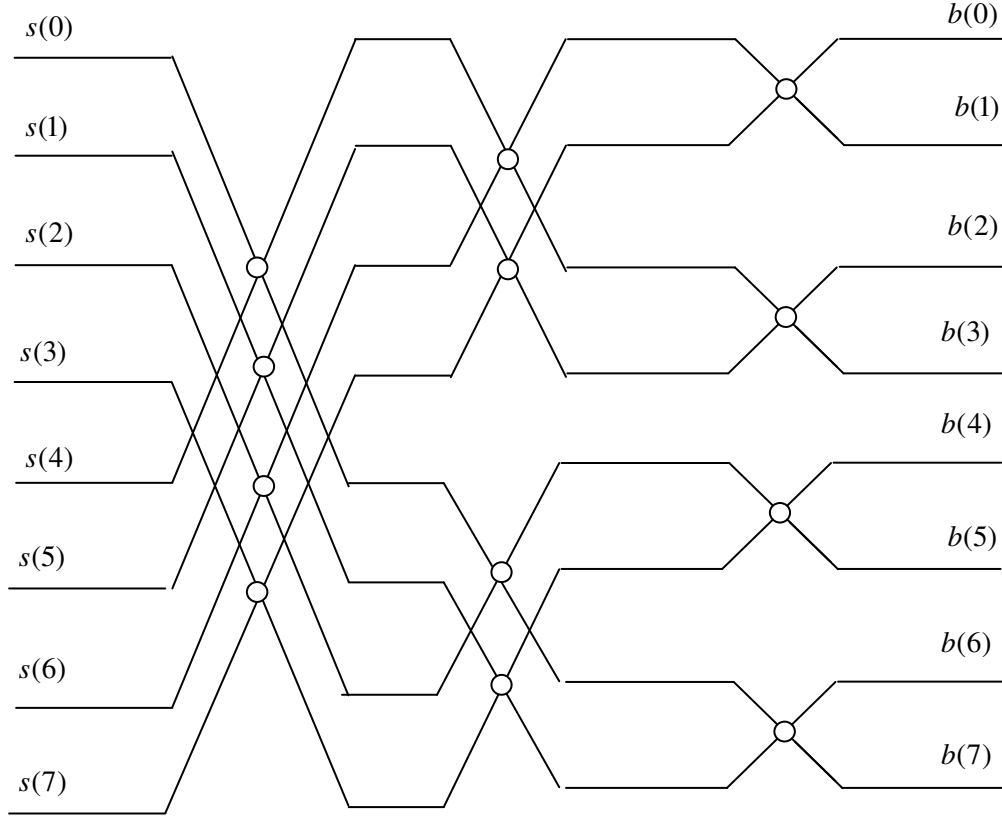


Рис. 2.15. Граф алгоритма БПУА для  $N = 8$

Возможность представления матриц Адамара в виде произведения слабозаполненных матриц показал Гуд. Факторизация методом Гуда для матриц, представляющих собой кронекеровское произведение нескольких одинаковых матриц, основана на следующих теоремах.

1. Если  $E_m^{[n]}$  произвольная матрица размером  $m \times m$ , то

$$E_m^{[n]} = \underbrace{E_m \otimes E_m \otimes \dots \otimes E_m}_{n \text{ раз}} = B_{m^n}^n.$$

Другими словами,  $n$ -я кронекеровская степень матрицы  $E_m$  размером  $m \times m$  равна обычной  $n$ -й степени матрицы  $B_m^n$  размером  $m^n \times m^n$ .

2. Если  $E_m^{[n]}$  произвольная матрица размером  $m \times m$ , то

$$E_m^{[n]} = \underbrace{E_m \otimes E_m \otimes \dots \otimes E_m}_{n \text{ раз}} = C_{m^n}^{(1)} \cdot C_{m^n}^{(2)} \dots C_{m^n}^{(n)},$$

где  $C_{m^n}^{(1)} = E_m \otimes 1_m \otimes \dots \otimes 1_m$ ;  $C_{m^n}^{(2)} = 1_m \otimes E_m \otimes \dots \otimes 1_m$ ;  $C_{m^n}^{(n)} = 1_m \otimes 1_m \otimes \dots \otimes E_m$ .

Здесь  $1_m$ -единичная матрица размером  $m \times m$ , а матрицы  $C_{m^n}^{(1)}, C_{m^n}^{(2)}, \dots, C_{m^n}^{(n)}$  – все размером  $m^n \times m^n$ .

Особенностью матриц  $B_m^n$  и матриц  $C_{m^n}^{(1)}, C_{m^n}^{(2)}, \dots, C_{m^n}^{(n)}$  является то, что они имеют не больше  $m^{n+1}$  отличных от нуля элементов, поэтому общее число операций типа сложение-вычитание не превышает величины  $n \times m^n$ .

Для матриц Адамара:

$$H_{2^n} = E_2^{[n]},$$

где  $E_2^{[n]} = E_2^{[1]} \otimes E_2^{[2]} \otimes \dots \otimes E_2^{[i]} \otimes \dots \otimes E_2^{[n]}$ ,  $E_2^{[l]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ .

Согласно теореме 1, матрица Адамара размером  $8 \times 8$  раскладывается на произведение трех слабозаполненных сомножителей:

$$H_8 = H_2 \otimes H_2 \otimes H_2 = B^3,$$

где  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

Согласно теореме 2, матрица Адамара может быть факторизована следующим образом:

$$H_8 = C_8^{(1)} \cdot C_8^{(2)} \cdot C_8^{(3)},$$

где  $C_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,

$$C_8^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & 1 & & -1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & -1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}, C_8^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \\ & & & & 1 & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычисление векторно-матричного произведения при использовании рассмотренных методов факторизации матриц Адамара требует выполнения 24 операций типа сложение-вычитание. Прямой метод умножения вектора на матрицу  $H_8$  предполагает 56 вычислений.

## 2.5. Преобразование Хаара

Функции Хаара  $\{har(r, k, t)\}$  были построены в 1910 г. Они образуют полную систему ортонормированных функций, определенных на интервале  $[0, N)$ ,  $N = 2^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  и описываются следующими рекуррентными соотношениями [8]:

$$har(0, 0, t) = 1, \quad t \in x[0, 1);$$

$$har(r, k, t) = \begin{cases} 2^{r/2}, & (k-1)2^{-r} \leq t < (k-0,5)2^{-r}; \\ -2^{r/2}, & (k-0,5)2^{-r} \leq t < k2^{-r}; \\ 0, & \text{при остальных } t \in x[0, 1); \end{cases}$$

$$0 \leq r < \log_2 N \quad 1 \leq k \leq 2^r.$$

Для  $N = 4$   $r \in 0, 1$ ,  $k \in 1, 2$

$$har(0, 0, t) = 1, \quad t \in x[0, 1); \quad har(0, 1, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0,5; \\ -1, & 0,5 \leq t < 1. \end{cases}$$

$$har(1, 1, t) = \begin{cases} 2^{1/2}, & 0 \leq t < 0,25; \\ -2^{1/2}, & 0,25 \leq t < 0,5; \\ 0, & \text{для других } t; \end{cases} \quad har(1, 2, t) = \begin{cases} 2^{1/2}, & 0,5 \leq t < 0,75; \\ -2^{1/2}, & 0,75 \leq t < 1; \\ 0, & \text{для других } t. \end{cases}$$

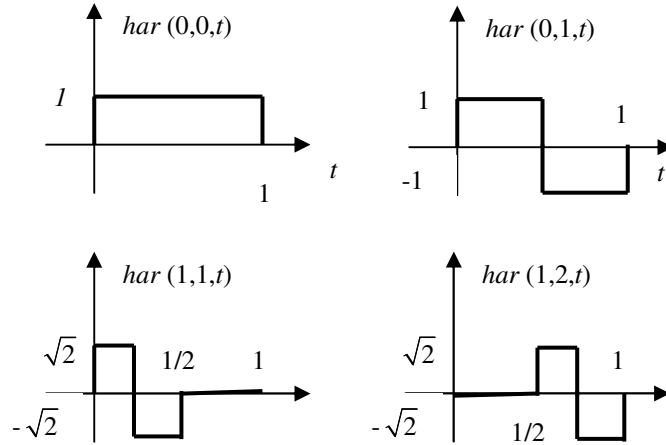


Рис. 2.16. Функции Хаара для  $N = 4$

При дискретизации системы функций Хаара, представленной выше, получаются дискретные функции Хаара  $har(r, k, t)$ , определенные в целочисленных точках  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Для  $N = 4$  матрица функций Хаара имеет вид:

$$Hr_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Для  $N = 8$  матрица функций Хаара:

$$Hr_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Так как функции Хаара ортогональны, то  $Hr_N Hr_N^T = NI$ . Множество функций Хаара, в отличие от функций Уолша, не является мультипликативным, т. е. произведение функций Хаара не приводит вновь к функции Хаара. С увеличением переменной  $r$  уменьшается интервал, на котором

функция Хаара отлична от нуля. Это обстоятельство позволяет использовать разложение Хаара для получения спектральных коэффициентов, учитывающих локальное поведение функции.

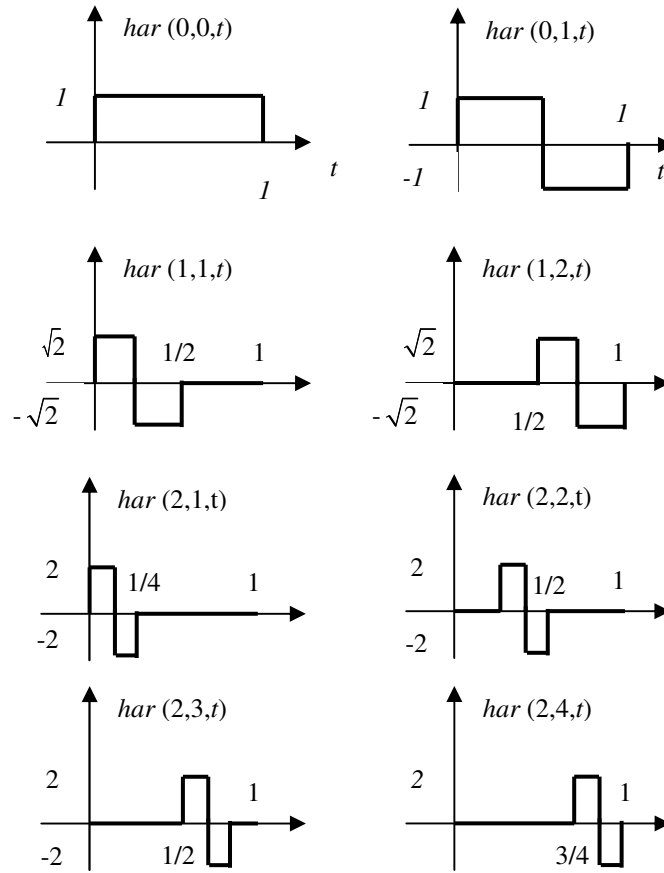


Рис. 2.17. Функции Хаара для  $N = 8$

Пара дискретного преобразования Хаара сигнала  $S$  определяется следующими соотношениями [8]:

$$Y = HrS,$$

$$S = N^{-1}Hr^T Y.$$

Первое выражение называется прямым преобразованием Хаара, а второе выражение – обратным преобразованием Хаара.

Например, для сигнала вида  $S = (2, 4, 1, 4)$  спектр сигнала в базисе Хаара определяется:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

В результате выполнения обратного преобразования Хаара получаем исходный сигнал:

$$S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Для выполнения преобразования Хаара существует ряд быстрых алгоритмов, на рисунках, представленных ниже, показаны графы быстрого преобразования Хаара для  $N = 4$  (рис. 2.18) и  $N = 8$  (рис. 2.19).

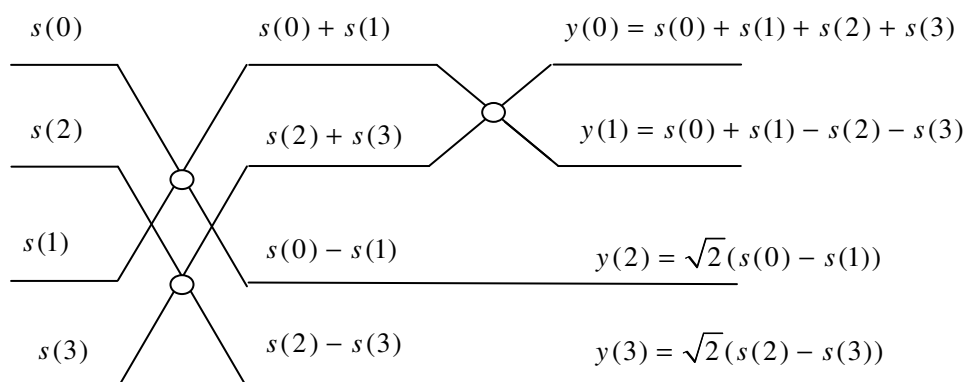


Рис. 2.18. Граф быстрого преобразования Хаара для  $N = 4$

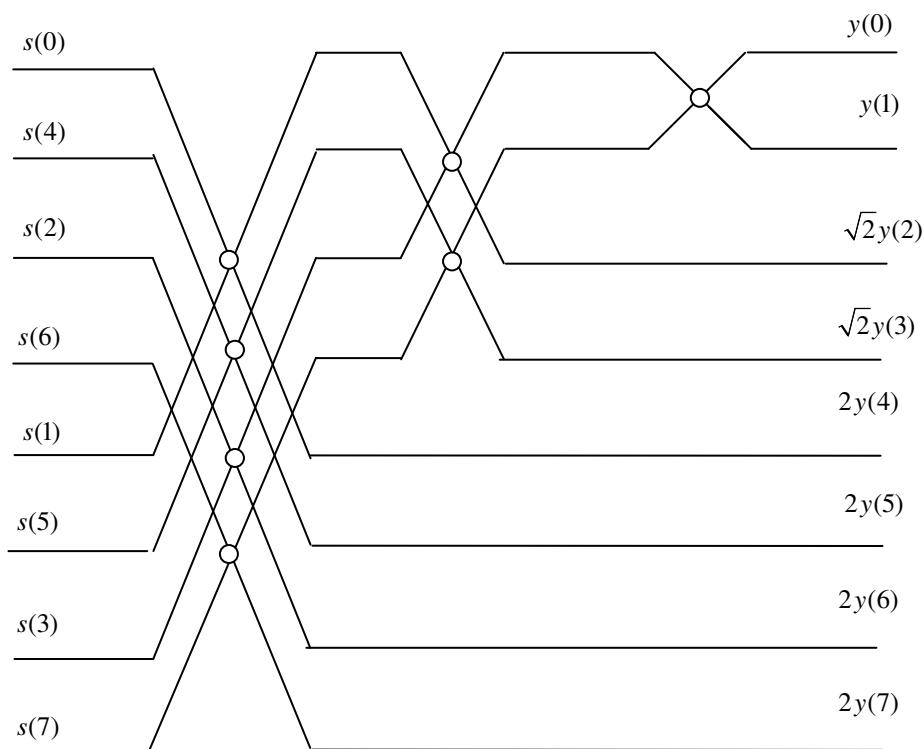


Рис. 2.19. Граф быстрого преобразования Хаара  $N = 8$

## **2.6. Элементы вейвлет-преобразования сигналов**

### **2.6.1. Основы вейвлет-преобразования**

Вейвлеты (wavelet – короткая волна, иногда переводится как всплеск) – функции определенной формы, локализованные по оси аргументов (независимых переменных), инвариантные к сдвигу и линейные к операции масштабирования (сжатия/растяжения). Они создаются с помощью специальных базисных функций, которые определяют их вид и свойства. Впервые этот термин использовали Гроссман и Морле (A. Grossmann, J. Morlet) при анализе свойств сейсмических и акустических сигналов [10].

Основная область применения вейвлетных преобразований – анализ и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только общую частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения об определенных локальных координатах, на которых себя проявляют те или иные группы частотных составляющих, или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала. По сравнению с разложением сигналов на ряды Фурье, вейвлеты способны с гораздо более высокой точностью представлять локальные особенности сигналов, вплоть до разрывов 1-го рода (скачков). В отличие от преобразований Фурье, вейвлет-преобразование одномерных сигналов обеспечивает двумерную развертку, при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные, что дает возможность анализа сигналов сразу в двух пространствах.

Одна из главных и особенно плодотворных идей вейвлетного представления сигналов на различных уровнях декомпозиции (разложения) заключается в разделении функций приближения к сигналу на две группы: аппроксимирующую – грубую, с достаточно медленной временной динамикой изменений, и детализирующую – с локальной и быстрой динамикой изменений на фоне плавной динамики, с последующим их дроблением и детализацией на других уровнях декомпозиции сигналов. Это возможно как во временной, так и в частотной областях представления сигналов вейвлетами.

В настоящее время вейвлет-преобразования и вейвлетный анализ используются во многих областях науки и техники для самых различных задач: для распознавания образов, для численного моделирования динамики сложных нелинейных процессов, для анализа аппаратной информации и изображений в медицине, космической технике, астрономии, геофизике, для эффективного сжатия сигналов и передачи информации по каналам с ограниченной пропускной способностью и т. п.



Возможности вейвлетов еще не раскрыты полностью. Однако это не означает, что их развитие приведет к полной замене традиционных средств обработки и анализа информации, хорошо отработанных и проверенных временем. Но оно может существенно расширить инструментальную базу информационных технологий обработки данных.

Непрерывное вейвлет-преобразование (CTWT) есть скалярное произведение сигнала  $s(t)$  и базисных вейвлет-функций  $\psi_{a,b}$  [10]:

$$CTWT_s(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b} \cdot s(t) dt ,$$

где  $a$  – значение масштаба вейвлет функции;

$b$  – значение сдвига вейвлет функции относительно сигнала;

$$\psi_{a,b}(n) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a \in R^+, \quad b \in R, \quad R - \text{множество вещественных чисел.}$$

Базисные функции являются вещественными и колеблются вокруг оси абсцисс. Они определены на некотором интервале.

Параметр  $b$  показывает расположение во времени вейвлета, а  $a$  – параметр масштаба. Большие значения  $a$  соответствуют низким частотам, малые – высоким. Операция умножения на окно как бы содержится в самой базисной функции, которая позволяет сужать и расширять это окно. Отсюда появляется возможность адаптивного к сигналу выбора параметров окна.

Результатом вейвлет-преобразования одномерного числового ряда (сигнала) является двумерный массив амплитуд – значений коэффициентов. Распределение этих значений в пространстве  $(a,b)$  = (временной масштаб, временная локализация) дает информацию об изменении относительного вклада вейвлетных компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, масштабно-временным (частотно-временным) спектром или просто вейвлет-спектром (wavelet spectrum).

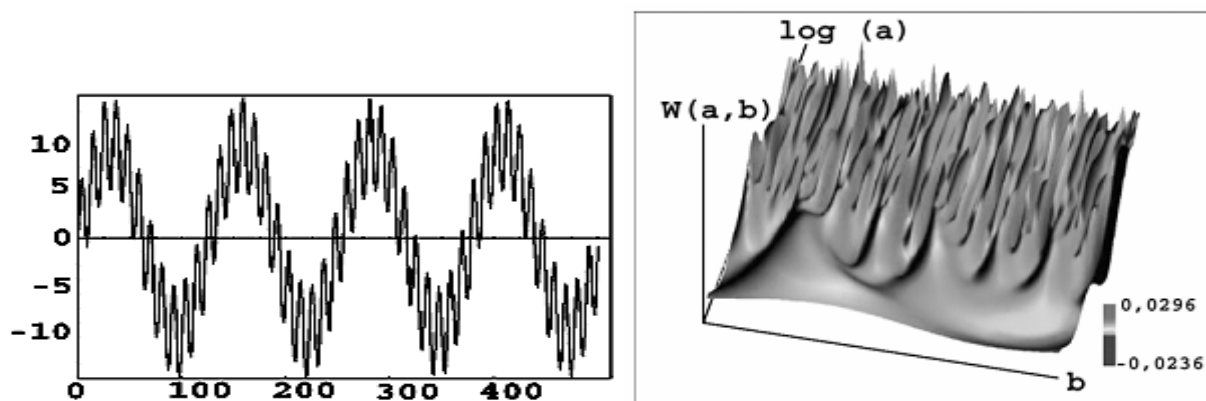


Рис. 2.20. Пример вейвлет преобразования сигнала

Выбор конкретного материнского вейвлета зависит от характера поставленной задачи и от конкретного анализируемого сигнала. Разные сигналы удастся анализировать тем или иным способом и критерием успеха может служить, например, простота получаемого разложения.

При вейвлет-преобразовании нет частотного параметра, как это было при ДПФ. Вместо него используется параметр масштаба, который можно определить как величину, обратную частоте. Параметр масштаба в вейвлет-анализе имеет аналогию с масштабом географических карт. Большое значение масштаба соответствуют малому количеству деталей, глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали. Аналогично, в терминах частоты, низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале (которая содержится на всей его протяженности), а высокие частоты – детальной информации, скрытым особенностям, которые имеют обычно малую протяженность. Масштабирование, как математическая операция, расширяет или сжимает сигнал. Поэтому, при  $a > 1$  расширяет сигнал, а при  $a < 1$  сжимает его.

Наиболее простой пример дискретного вейвлета – это HAAR-вейвлет. Рассмотрим вейвлет-преобразование  $N$ -точечной последовательности отсчетов цифрового сигнала. В качестве примера возьмем 8-точечную последовательность:

$$s(n) = \{20, 16, 14, 10, 8, 6, 4, 2\}.$$

На первом этапе для каждой пары соседних отсчетов вычисляются их средние значения (полусуммы) и полуразности:

$$(20 + 16)/2 = 18; (14 + 10)/2 = 12; (8 + 6)/2 = 7; (4 + 2)/2 = 3;$$

$$(20 - 16)/2 = 2; (14 - 10)/2 = 2; (8 - 6)/2 = 1; (4 - 2)/2 = 1.$$

Полученную последовательность, состоящую из четырех полусумм и четырех полуразностей, можно использовать для восстановления отсчетов исходного сигнала:

$$s^3(n) = \{18, 12, 7, 3, 2, 2, 1, 1\}.$$

Описанная процедура применяется к четырем первым (крупным) элементам последовательности:

$$(18 + 12)/2 = 15; (7 + 3)/2 = 5; (18 - 12)/2 = 3; (7 - 3)/2 = 2.$$

Остальные элементы последовательности  $s^3(n)$  оставим без изменения. Получилась последовательность следующего вида:

$$s^2(n) = \{15, 5, 3, 2, 2, 1, 1\}.$$

Последняя итерация преобразует первые два элемента последовательности  $s^2(n)$  в одно среднее и одну полуразность:

$$(15+5)/2 = 10; (15-5)/2 = 5.$$

Очевидно, что последняя полусумма является средним значением всех восьми отсчетов исходного цифрового сигнала. В итоге получилась преобразованная 8-точечная последовательность:

$$s^1(n) = \{10, 5, 3, 2, 2, 2, 1, 1\},$$

которая состоит из общего среднего и семи полуразностей, выражающих различные уровни детализации исходного сигнала.

Рассмотренная процедура представляет собой вейвлет-преобразование, а результирующая последовательность является вейвлет-образом исходного сигнала.

### 2.6.2. Матричное представление

Рассмотрим 4-точечную последовательность отсчетов цифрового сигнала:

$$s(n) = \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \end{bmatrix}.$$

Согласно рассмотренной выше процедуре вейвлет-преобразования для восьмиточечной последовательности, в данном случае на первом этапе преобразование, состоящее из вычисления двух полусумм и двух полуразностей в матричной форме, определяется следующим образом:

$$s^2(n) = H_w^2 s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \end{bmatrix}.$$

Верхние две строки матрицы  $H_w^2$  усредняют два соседних отсчета сигнала, а нижние две – детализируют их. Если каждую строку (или каждый

столбец) матрицы  $H_W^2$  считать четырехмерным вектором, то можно заметить, что скалярное произведение любой пары векторов, как сумма произведений соответствующих компонентов, равно нулю, т. е. они образуют ортогональную систему. Норма (длина) каждого вектора равна  $1/\sqrt{2}$ . Для удобства преобразований нормы векторов приводят к единице, умножая все компоненты на  $\sqrt{2}$ . В этом случае формируется ортогональная матрица:

$$H_W^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

На последнем этапе необходимо сохранить полуразности и преобразовать две полусуммы. Исходя из аналогичных рассуждений, можно записать матрицу вида:

$$H_W^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы усредняет отсчеты, вторая – детализирует, третья и четвертая, образуя единичную матрицу, сохраняют предыдущие полуразности. Произведение матриц  $H_W^1$  и  $H_W^2$  дает искомое дискретное вейвлет-преобразование исходной последовательности:

$$H_W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $H_W$  также является ортогональной и представляет собой нормированную матрицу Хаара.

В базисе функций Хаара возможно разложение непрерывного во времени сигнала, заданного также на единичном интервале. При увеличении порядка матрицы  $N$  будет происходить сжатие функций во времени (масштабирование), а сами они станут напоминать короткие всплески, перемещаемые по оси абсцисс.

Подобный процесс составляет сущность непрерывного вейвлет-анализа, основанного на масштабировании и сдвигах. Ограниченные по длительности и перемещаемые во времени вейвлеты в результате свертки с отрезками сигнала позволяют выявить их локальные особенности, чего не предполагают другие методы анализа.

Дискретным аналогом описанного процесса является воздействие матрицы  $H_W$  на вектор отсчетов входного сигнала  $s(n)$ .

Обобщим матричный алгоритм усреднения и детализации на произвольную  $N$ -точечную последовательность, когда  $N = 2^v$  при поэтапном процессе преобразования. На первом шаге используется ортогональная квадратная матрица порядке  $N = 2^v$ :

$$H_W^v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & & & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Анализ  $H_W^v$  позволяет выделить две новые матрицы, входящие в состав  $H_W^v$ :

$$A_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}, D_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно утверждать, что  $H_W^v$  является блочной матрицей, состоящей из двух подматриц  $A_v$  и  $D_v$ , размером  $2^{v-1} \times 2^v$  каждая:

$$H_W^v = \begin{bmatrix} A_v \\ D_v \end{bmatrix}.$$

Подматрицу  $A_v$  можно назвать преобразованием усреднения, а  $D_v$  – преобразованием детализации. Введем векторы-столбцы результатов поэтапного преобразования

$$a_{v-1} = \begin{bmatrix} a_{v-1}^0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{v-1}^{2^{v-1}-1} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad d_{v-1} = \begin{bmatrix} d_{v-1}^0 \\ . \\ . \\ . \\ d_{v-1}^{2^{v-1}-1} \end{bmatrix},$$

которые содержат  $2^{v-1}$  элементов и соответственно являются векторами коэффициентов усреднения (низкочастотные коэффициенты) и детализации (высокочастотные коэффициенты). С учетом принятых обозначений вейвлет - преобразование на первом этапе примет вид:

$$H_W^v s = \begin{bmatrix} A_v \\ D_v \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} a_{v-1} \\ d_{v-1} \end{bmatrix}.$$

На каждом шаге вейвлет-преобразования сохраняются высокочастотные коэффициенты  $d$ , а обрабатываются низкочастотные коэффициенты  $a$ . Таким образом, очередной шаг вейвлет-преобразования состоит в

применении к вектору  $a$  операций усреднения и детализации. Чтобы построить часть вейвлет-преобразования, вектор  $d_{v-2}$  сохраняется вместе с  $d_{v-1}$ . Этот процесс продолжается до заключительного шага, на котором получаются скалярные величины  $a$  и  $d$ . Итоговый результат вейвлет-преобразования можно представить вектором-столбцом, содержащим  $N = 2^v$  элементов:

$$w = \begin{bmatrix} a_1 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_v \end{bmatrix}.$$

В практических приложениях выдвигается традиционное требование обратимости вейвлет-преобразования, как и любого преобразования. Для обратного вейвлет-преобразования необходимо применить выражение:

$$S = H_w^T w.$$

Очевидно, что результат вейвлет-преобразования сильно зависит от базисных функций, временных сдвигов и от типа вейвлета. На практике масштабирующие множители, сжимающие базисные функции, принимаются равными отрицательным степеням двойки. Соответственно, временные сдвиги выбираются равными положительным степеням двойки. Основное направление в исследовании типов вейвлетов состоит в поисках таких семейств, которые образуют ортогональный базис (ортогональную матрицу преобразований).

Самый простой способ описания вейвлет-преобразований использует произведение матриц. Усложнение конструкции вейвлетов основано на построении взвешенных средних и взвешенных разностей для  $N$ -точечных последовательностей отсчетов входного сигнала ( $N > 2$ ) и некоторого множества коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_{N-1}$ . Подобный выбор приводит к следующему свойству:

$$c_0 c_1 - c_0 c_1 + c_2 c_3 - c_2 c_3 + \dots = 0.$$

По такому принципу построен один из самых используемых вейвлетов – вейвлет Добеши, который принято обозначать  $D4$ , т. к. он основан на четырех коэффициентах  $c_0, c_1, c_2, c_3$ . Матрица этого преобразования имеет вид:

$$D_W = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & . & . & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & . & . & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & . & . & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & 0 & . & . & 0 & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}.$$

Если эту матрицу умножить на вектор-столбец отсчетов входного сигнала, то ее первая строка дает взвешенную сумму первых четырех отсчетов. Третья строка определит такую же сумму, но сдвинутую на две временные позиции. Все строки с нечетными номерами зададут аналогичные взвешенные суммы (усреднения). Таким образом, коэффициенты  $c_3, c_2, c_1$  и  $c_0$  определяют фильтр, выходной сигнал которого подлежит децимации с коэффициентом 2. Аналогично четные строки матрицы порождают взвешенные разности (высокочастотные коэффициенты). При этом задается другой фильтр с коэффициентами  $-c_0, c_1, -c_2$  и  $c_3$  и децимацией выходного сигнала.

Требование ортогональности матрицы для ее легкого обращения (транспонирования) приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1; \\ c_0c_2 + c_1c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Одним из возможных решений, удовлетворяющих уравнениям, и является следующий набор коэффициентов:

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.483; \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.837; \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.224; \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx -0.129.$$

Обратное вейвлет-преобразование получается транспонированием матрицы прямого преобразования:



$$D_W^T = \begin{bmatrix} c_0 & c_3 & 0 & . & . & 0 & c_2 & c_1 \\ c_1 & -c_2 & 0 & . & . & 0 & c_3 & -c_0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_3 & 0 & . & . & 0 \\ c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & c_0 & c_3 \\ 0 & . & 0 & . & 0 & 0 & c_1 & -c_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование определено неоднозначно: каждому вейвлету соответствует свое преобразование. В качестве анализирующих вейвлетов обычно выбираются функции, хорошо локализованные также и в «пространственной области» (т. е. по времени). На рис. 2.21 изображен типичный график вейвлета и его Фурье-образа.

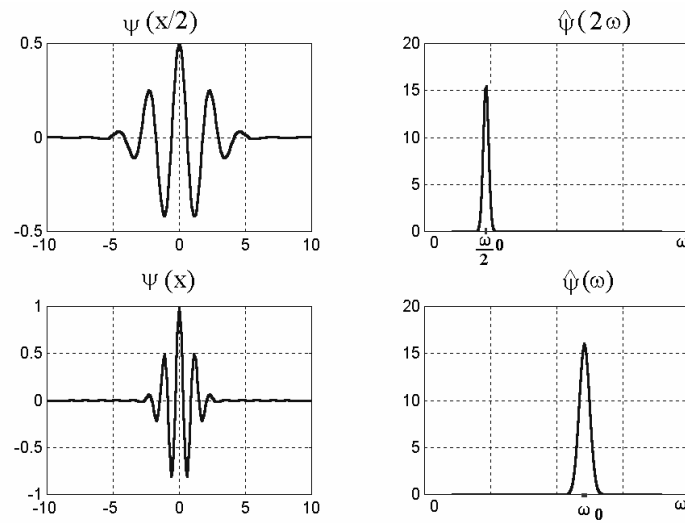


Рис. 2.21. Вейвлет в пространственной и частотной областях

Вейвлет-преобразование широко используется для обработки растровых изображений. Поскольку растровое изображение является двумерным дискретным сигналом, то к нему применимы двумерные дискретные вейвлет-преобразования. Один шаг двумерного вейвлет-преобразования выделяет одну низкочастотную и три высокочастотных компоненты исходного сигнала-изображения. Если не производить никаких дополнительных действий с этими компонентами, то по ним с помощью шага обратно-

го вейвлет-преобразования можно полностью восстановить исходное изображение. Специальным образом обрабатывая низко- и высокочастотные компоненты такого разложения и осуществляя (если нужно) обратные преобразования, можно добиваться различных результатов обработки.

Для вейвлет-преобразования цифровых изображений применяют пирамиду Маллата: для каждой строки цифрового изображения  $f(i, j)$  выполняются операция фильтрации с помощью одномерных низкочастотного фильтра  $L$  (с импульсной характеристикой  $l_k$ ) и высокочастотного фильтра  $H$  (с импульсной характеристикой  $h_k$ ) и операция децимации в два раза. В результате формируются матрица низкочастотных коэффициентов  $f^L(i, j)$  и матрица высокочастотных коэффициентов  $f^H(i, j)$ . Затем для каждого столбца полученных матриц выполняются операции фильтрации и децимации, в итоге формируются четыре матрицы (изображения)  $f^{LL}(i, j)$ ,  $f^{LH}(i, j)$ ,  $f^{HL}(i, j)$  и  $f^{HH}(i, j)$ . Изображение  $f^{LL}(i, j)$  представляет собой аппроксимацию изображения  $f(i, j)$ , а изображения  $f^{LH}(i, j)$ ,  $f^{HL}(i, j)$  и  $f^{HH}(i, j)$  содержат детализирующую информацию.

Для изображения  $f(i, j)$  размером  $N_1 \times N_2$  один шаг вейвлет-преобразования выполняется на основе выражений:

$$\begin{aligned} f^{LL(g+1)}(i, j) &= \sum_{k_1=0}^{L-1} \left( \sum_{k_2=0}^{L-1} f^{LL(g)}(2i + k_1, 2j + k_2) \cdot l_{k_2} \right) \cdot l_{k_1}; \\ f^{HL(g+1)}(i, j) &= \sum_{k_1=0}^{L-1} \left( \sum_{k_2=0}^{L-1} f^{LL(g)}(2i + k_1, 2j + k_2) \cdot h_{k_2} \right) \cdot l_{k_1}; \\ f^{LH(g+1)}(i, j) &= \sum_{k_1=0}^{L-1} \left( \sum_{k_2=0}^{L-1} f^{LL(g)}(2i + k_1, 2j + k_2) \cdot l_{k_2} \right) \cdot h_{k_1}; \\ f^{HH(g+1)}(i, j) &= \sum_{k_1=0}^{L-1} \left( \sum_{k_2=0}^{L-1} f^{LL(g)}(2i + k_1, 2j + k_2) \cdot h_{k_2} \right) \cdot h_{k_1}; \end{aligned}$$

где  $f^{LL(g)}(i, j)$  – аппроксимирующие вейвлет-коэффициенты ( $f^{LL(0)}(i, j) = f(i, j)$ );

$g$  -этап вейвлет-разложения –  $g = \overline{0, n}$  ( $n = \log_2 \lfloor \min(N_1, N_2) \rfloor$ ),

$\lfloor * \rfloor$  – наибольшее ближайшее целое;

$l_{k_1}, l_{k_2}$  и  $h_{k_1}, h_{k_2}$  – коэффициенты низкочастотного и высокочастотного фильтров длиной  $L$  соответственно, причем  $\left( l_{k_1} = l_{k_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)$  и  $\left( h_{k_1} = h_{k_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)$ ;  
 $i = 0, N_1/2^{g+1} - 1, j = 0, N_1/2^{g+1} - 1$ .

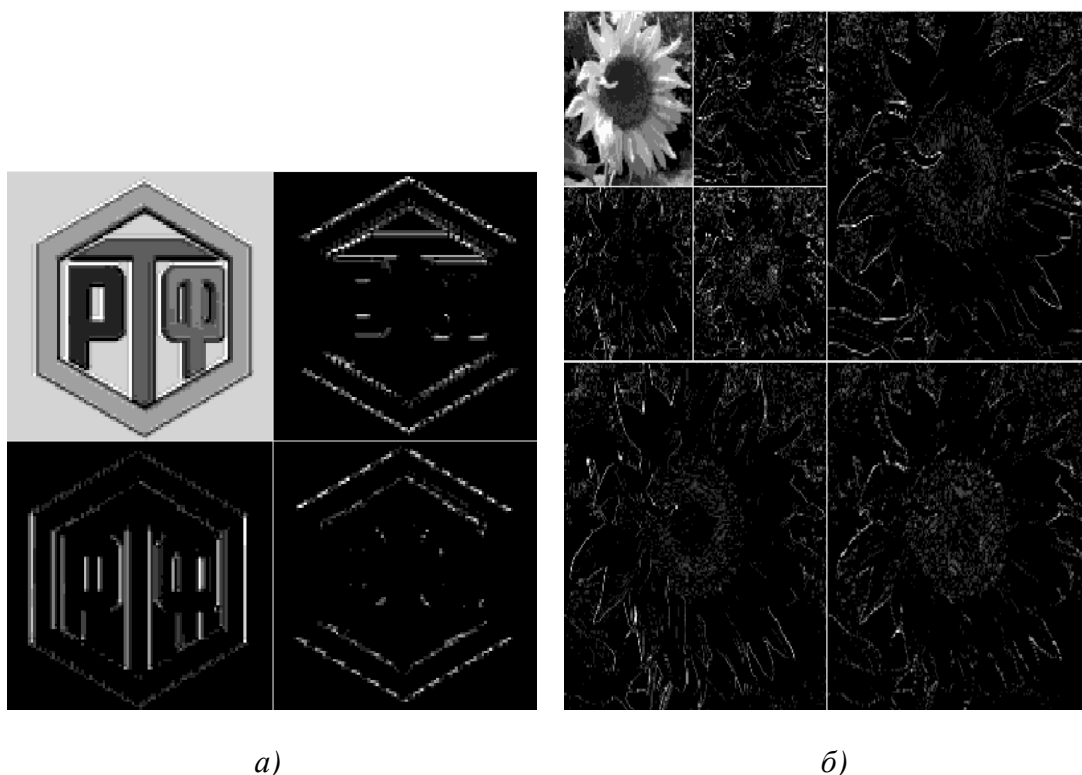


Рис. 2.22. Пример двумерного вейвлет-преобразования:  
 а) один шаг с использованием вейвлет Хаара;  
 б) два шага с использованием вейвлет Добеши

## 2.7. Вопросы и задания для самопроверки

1. Что понимают под спектром сигнала?
2. Запишите выражение для тригонометрической формы ряда Фурье.
3. На основе каких выражений можно определить амплитуду и фазу  $n$ -ой гармоники?
4. Каким образом можно выразить тригонометрические функции через показательные? Запишите формулы.
5. Запишите выражение для системы ДЭФ.
6. Представьте матрицу ДЭФ для  $N = 5$  с минимальными фазами.

7. Сформулируйте и запишите свойства ДЭФ.
8. Графически представьте поворачивающий множитель для  $N = 4$  ( $N = 6$ ,  $N = 8$ ).
9. Запишите пару ДПФ в показательной (матричной) форме.
10. Доказать, что Фурье-базис является ортогональным.
11. Запишите свойства ДПФ.
12. Сформулируйте алгоритм вычисления свертки (корреляции) с использованием ДПФ.
13. Постройте матрицу ДЭФ для выполнения обратного преобразования Фурье для сигнала длиной  $N = 6$ .
14. Назначение и особенности алгоритмов БПФ?
15. Какую операцию алгоритма БПФ называют базовой?
16. Что понимается под числом этапов прореживания БПФ?
17. Как определяется вычислительная сложность алгоритма БПФ с прореживанием по времени (частоте) по основанию 2?
18. Представьте сигнальный граф базовой операции алгоритма БПФ с прореживанием по времени (частоте)?
19. Каков порядок следования входных и выводных отсчетов в алгоритме БПФ с прореживанием по времени (частоте)?
20. Покажите, как с помощью алгоритма БПФ с прореживанием по времени (частоте) получить БПФ восьмиточечной последовательности путем объединения БПФ двух четырехточечных последовательностей?
21. Назовите особенности алгоритма действительного БПФ.
22. С использованием графа алгоритма действительного БПФ вычислить спектр сигнала  $\{s(n)\} = \{1, 2, 2, 2, -2, -2, -2, -1\}$ .
23. Дайте определение импульсной характеристике линейной дискретной системы. Как определить импульсную характеристику системы?
24. Дайте определение переходной характеристике линейной дискретной системы.
25. Что такое свертка и для каких целей она используется в ЦОС? Какие виды свертки можете назвать и в чем их отличие?
26. Вычислить линейную свертку двух сигналов  $s(n) = (10, 10, 8, 6, 8, 10, 10)$  и  $h(n) = (-2, 5, -2)$ .
27. Что такое корреляция и как она может вычисляться?
28. Вычислите ВКФ с помощью БПФ с прореживанием по времени для двух сигналов  $s(n) = (2, 2, -2, -2)$  и  $w(n) = (3, 2, -2, -2)$ . Определите вычислительную сложность.

29. Докажите, что функции Уолша образуют ортонормированную систему.
30. Дайте определение матрице Адамара и запишите способы построения матриц Адамара.
31. Сформулируйте и запишите основные свойства функций Уолша.
32. Дайте определение функциям Радемахера и постройте их для  $N = 16$ .
33. Представьте взаимосвязь различных систем функций Уолша.
34. Запишите пару дискретного преобразования Уолша-Адамара в показательной (в матричной) форме.
35. По какому правилу образуется диадный сдвиг функции?
36. Сформулируйте алгоритм вычисления диадной свертки на основе преобразования Уолша-Адамара.
37. Сколько слабозаполненных матриц образуется при факторизации матрицы Адамара, упорядоченной по Пэли, размером  $128 \times 128$ ?
38. На основе какого выражения можно построить функции Хаара?
39. Запишите пару дискретного преобразования Хаара и сформулируйте его особенности по сравнению с ДПФ?
40. В чем заключается сущность и особенности вейвлет-преобразования сигналов?
41. Представьте матрицы для выполнения прямого и обратного вейвлет-преобразования для сигнала  $N = 8$  с использованием вейвлетов Хаара и Добеши  $D4$ .
42. На основе каких выражений можно выполнить двумерное вейвлет-преобразование?

## МОДУЛЬ 3. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

*Цель модуля* – изучение студентами методов математического описания, основных типов фильтров и особенностей реализации цифровых фильтров.

В результате изучения модуля студенты *должны знать*:

- принцип построения структуры цифрового фильтра;
- основные типы ЦФ, их математическое описание и особенности.

Студенты *должны уметь*:

- определять основные параметры фильтров по заданным исходным данным;
- а также иметь представление о процессорах ЦОС и особенностях реализации алгоритмов ЦОС.

### 3.1. Методы математического описания и типы ЦФ

#### 3.1.1. Основы Z-преобразования

В отличие от аналоговых фильтров в цифровых фильтрах используются элементы, которые выполняют функции, отличающиеся от функций резисторов, индуктивностей и емкостей. К таким элементам относятся умножители, сумматоры и элементы задержки на период дискретизации, характеризующиеся зависимостью между входными и выходными параметрами, а не соотношением между током и напряжением. Физически элемент задержки представляет собой регистр, хранящий один предшествующий (задержанный) отсчет сигнала.

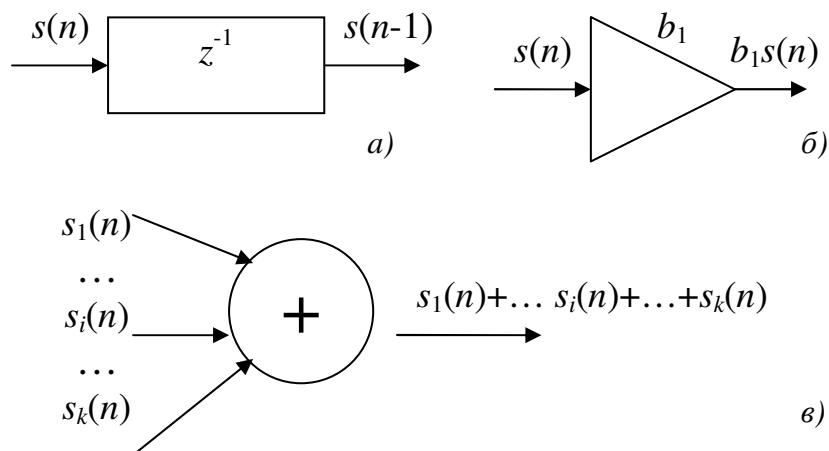


Рис. 3.1. Элементы цифрового фильтра:  
а) элемент задержки; б) умножитель; в) сумматор

Функционирование ЦФ описывается разностным уравнением [11]:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)s(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} a(k)y(n-k), \quad (3.1)$$

где  $b(k)$ ,  $a(k)$  – постоянные коэффициенты;

$s(n)$ ,  $y(n)$  – отсчеты входного и выходного сигнала соответственно;

$k$  – значение задержки;

$N$ ,  $M$  – константы;

Коэффициенты  $b(k)$  и  $a(k)$  называют внутренними параметрами или просто параметрами ЦФ.

ЦФ, соотношение вход/выход которого описывается в виде разностного уравнения (3.1), отвечает условиям физической реализуемости: при нулевых начальных условиях реакция не может возникнуть раньше воздействия. Значения реакции  $y(n)$  в каждый момент времени  $n$  зависят от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Однако поскольку разностные уравнения не позволяют судить о передаточной характеристике ЦФ, для ее определения применяют  $Z$  – преобразование разностного уравнения. Поэтому кратко рассмотрим данное преобразование и его особенности.

Одностороннее  $Z$ -преобразование определяется выражением:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(n)z^{-n}, \quad (3.2)$$

где  $z$  – комплексная переменная, которая может быть представлена в двух формах: в алгебраической ( $z = \xi + j\eta$ ) и в показательной ( $z = re^{j\varphi}$ ), где радиус  $z$  является модулем, а угол  $\varphi$  – аргументом переменной  $z$ :

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \varphi = \arg(z) = \arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Соответственно положение произвольной точки на комплексной  $Z$ -плоскости может задаваться:

– координатами  $(\xi; \eta)$  – в декартовой системе координат;

– полярными координатами  $(r; \varphi)$  – в полярной системе координат.

$Z$ -преобразование однозначно связывает последовательность  $s(n)$  с ее  $Z$ -изображением  $X(z)$  и справедливо только в области абсолютной сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} |s(n)z^{-n}| < \infty$ , которую называют областью сходимости  $Z$ -изображения.

На комплексной  $Z$ -плоскости это область вне круга радиуса  $R = |a|$ .



Рис. 3.2. Область сходимости  $Z$ -изображения

Область сходимости определяется свойствами последовательности  $s(n)$ .

Если сравнить выражения для  $Z$ -преобразования и для преобразования Фурье, то можно увидеть, что преобразование Фурье представляет собой частный случай  $Z$ -преобразования, т. е. преобразование Фурье представляет собой  $Z$ -преобразование, вычисленное на единичной окружности ( $R=1$ ) комплексной  $Z$ -плоскости.

*Пример* [2]. Найти  $Z$ -преобразование и области сходимости последовательности дискретного времени, приведенной на рис. 3.3.

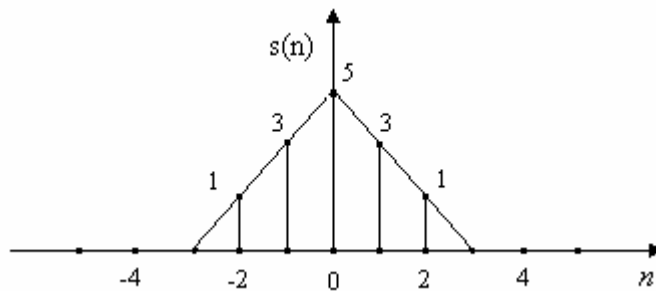


Рис. 3.3. Последовательность дискретного времени

Последовательность имеет конечную длину, значения последовательности  $s(-3) = 0$ ,  $s(-2) = 1$ ,  $s(-1) = 3$ ,  $s(0) = 5$ ,  $s(1) = 3$ ,  $s(2) = 1$ ,  $s(3) = 0$ . Двухстороннее  $z$ -преобразование определяется как:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n} = z^2 + 3z + 5 + 3z^{-1} + z^{-2}.$$



Обратное  $Z$ -преобразование ( $Z^{-1}$ ) позволяет восстанавливать последовательность дискретного времени  $s(n)$  по ее  $Z$ -образу. В символической форме обратное  $Z$ -преобразование определяется как:

$$s(n) = Z^{-1}(X(z)).$$

Для определения обратного  $Z$ -преобразования существует ряд способов: с использованием таблицы соответствий; методом разложения на элементарные дроби; методом разложения в степенной ряд; методом вычетов.

Рассмотрим нахождение обратного  $Z$ -преобразования с использованием таблицы соответствий.

*Пример* [11]. Найти последовательность  $s(n)$  по ее  $z$ -образу:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Числитель  $X(z)$  – многочлен ненулевой степени, поэтому следует представить в виде суммы дробей:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

В таблице соответствий находится  $Z$ -изображение с таким же знаменателем и записывается соответствие:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \rightarrow s(n) = a^n.$$

Таблица 3.1

**Таблица последовательностей и их  $Z$ -преобразования**

Последовательность	$Z$ -изображение
$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0; \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, n = m; \\ 0, n \neq m. \end{cases}$	$z^{-m} U_0(z) = z^{-m}$
$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0. \end{cases}$	$U_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$
$u_1(n - m) = \begin{cases} 1, n \geq m; \\ 0, n < m. \end{cases}$	$U_1(z) z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1 - z^{-1}}$
$s(n) = (\pm a)^n$ $ a  < 1$	$X(z) = \frac{1}{1 \pm a z^{-1}}$

Согласно свойству линейности:

$$s(n) = Z^{-1} \left\{ \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} + Z^{-1} \left\{ \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} = b_0 Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} + b_1 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right\}.$$

На основании теоремы о задержке и соответствия для  $Z$ -преобразования получаем последовательность:

$$s(n) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1}.$$

В число областей применения  $z$ -преобразования входят: описание сигналов и систем дискретного времени, позволяющее без труда регулировать степень их устойчивости и визуализировать их частотные характеристики; анализ ошибок квантования цифровых фильтров и вычисление частотных характеристик систем дискретного времени.

### 3.1.2. Рекурсивные и нерекурсивные ЦФ

ЦФ называется рекурсивным, если хотя бы один из коэффициентов  $a(k), k = 1, 2, \dots, M - 1$ , разностного уравнения (3.1) не равен нулю [11].

Порядок рекурсивного ЦФ (РЦФ) определяется как:

$$\max\{(M - 1), (N - 1)\}.$$

Согласно (3.1), реакция  $y(n)$  РЦФ в каждый момент времени  $n$  определяется: текущим отсчетом воздействия  $s(n)$ ; предысторией воздействия  $s(n - k), k = 1, 2, \dots, N - 1$ ; предысторией реакции  $y(n - k), k = 1, 2, \dots, M - 1$ .

Примеры разностных уравнений РЦФ:

– первого порядка ( $y(n) = b_0 s(n) + b_1 s(n - 1) - a_1 y(n - 1)$ ),

– второго порядка ( $y(n) = b_0 s(n) + b_1 s(n - 1) + b_2 s(n - 2) - a_1 y(n - 1) - a_2 y(n - 2)$ ).

ЦФ называется нерекурсивным (НЦФ), если все коэффициенты  $a(k)$  разностного уравнения (3.1) равны нулю. Для НЦФ разностное уравнение принимают вид:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) s(n - k). \quad (3.3)$$

Порядок НЦФ определяется как  $(N - 1)$ .

Согласно (3.3), реакция  $y(n)$  НЦФ в каждый момент времени  $n$  определяется: текущим отсчетом воздействия  $s(n)$ ; предысторией воздействия  $s(n - k), k = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Пример разностного уравнения НЦФ второго порядка:

$$y(n) = b_0 s(n) + b_1 s(n-1) + b_2 s(n-2). \quad (3.4)$$

Для РЦФ и НЦФ можно определить импульсную характеристику по разностному уравнению и сравнить результаты на примерах [11].

Для вычисления импульсной характеристики НЦФ второго порядка подадим на вход цифровой единичный импульс, соотношение вход/выход которого описывается разностным уравнением (3.4).

Решим уравнение (3.4) методом подстановки при нулевых начальных условиях:

$$y(0) = b_0 s(0) + b_1 s(-1) + b_2 s(-2) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = b_0;$$

$$y(1) = b_0 s(1) + b_1 s(0) + b_2 s(-1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1;$$

$$y(2) = b_0 s(2) + b_1 s(1) + b_2 s(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2;$$

$$y(3) = b_0 s(3) + b_1 s(2) + b_2 s(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0.$$

Очевидно, что  $y(n) = 0$  при  $n > 2$ .

Таким образом, обобщая полученные результаты на НЦФ произвольного порядка, можно сделать выводы, что импульсная характеристика НЦФ имеет конечную длительность; значения отсчетов импульсной характеристики равны коэффициентам разностного уравнения.

Поэтому НЦФ называют фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтрами).

Теперь вычислим импульсную характеристику РЦФ первого порядка, соотношение вход/выход которой описывается разностным уравнением:

$$y(n) = b_0 s(n) + b_1 s(n-1) - a_1 y(n-1).$$

При  $b_1 = 0$  получим:

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1).$$

Для данного уравнения методом прямой подстановки при нулевых начальных условиях имеем:

$$y(0) = b_0 s(0) - a_1 s(-1) = b_0;$$

$$y(1) = b_0 s(1) - a_1 y(0) = -a_1 b_0;$$

$$y(2) = b_0 s(2) - a_1 y(1) = -a_1 (-a_1 b_0) = a_1^2 b_0;$$

$$y(3) = b_0 s(3) - a_1 y(2) = -a_1 (a_1^2 b_0) = -a_1^3 b_0.$$

Анализируя выражения, можно записать общую формулу вычисления импульсной характеристики для данного случая:

$$y(n) = (-1)^n a_1^n b_0, n = 4, 5 \dots$$

Таким образом, очевидно, что импульсная характеристика РЦФ имеет бесконечную длительность. Поэтому РЦФ называют фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтрами). Однако РЦФ могут иметь и конечную импульсную характеристику.

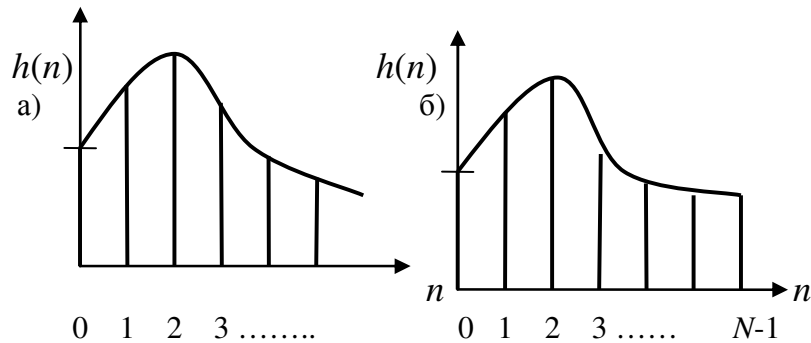


Рис. 3.4. Виды импульсных характеристик: а) БИХ; б) КИХ

По импульсной характеристике можно судить об устойчивости РЦФ. Устойчивому РЦФ отвечает затухающая со временем импульсная характеристика, что математически выражается как:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

### 3.1.3. Передаточная функция

Передаточной функцией  $H(z)$  ЦФ называется отношение  $Z$ -преобразования выходной последовательности к  $Z$ -преобразованию входной последовательности при нулевых начальных условиях [11].

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Таким образом, передаточная функция ЦФ может быть получена путем применения  $Z$ -преобразования к разностным уравнениям. Для РЦФ передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}.$$

Для РЦ передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}.$$

Анализ представленных выражений и разностных уравнений показывает, что:

- коэффициенты разностного уравнения являются коэффициентами передаточной функции;
- коэффициенты разностного уравнения  $b(k)$  при  $s(n-k)$  равны коэффициентам числителя передаточной функции при  $z^{-k}$ , при  $k=0,1,\dots,N-1$ ;
- коэффициенты разностного уравнения  $-a(k)$  при  $y(n-k)$  равны коэффициентам знаменателя передаточной функции (с обратным знаком) при  $z^{-k}$ , при  $k=1,\dots,M-1$ .

*Пример.* Известна передаточная функция РЦФ:

$$H(z) = \frac{0,8z^{-1} - 0,3z^{-2}}{1 + 0,3z^{-1} - 0,55z^{-2}}.$$

Разностное уравнение для данного РЦФ имеет вид:

$$y(n) = 0,8s(n) - 0,3s(n-1) - 0,3y(n-1) + 0,55y(n-2).$$

## 3.2. Структуры ЦФ

### 3.2.1. Основные структуры РЦФ

ЦФ может быть реализован аппаратно или программно. В первом случае – в виде специализированного цифрового устройства на интегральных логических элементах, во втором – в виде программы на компьютере или цифровом процессоре обработки сигналов. В последнее время программная реализация является преобладающей.

Для РЦФ определяют три основные структуры [11]: прямую; каскадную; параллельную.

Прямая структура определяется передаточной функцией  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

и отображает разностное уравнение:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)s(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} a(k)y(n-k).$$

На рис. 3.5 приведена прямая структура звена 2-го порядка, описываемого передаточной функцией:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

и разностным уравнением:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 s(n-1) + b_2 s(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2).$$

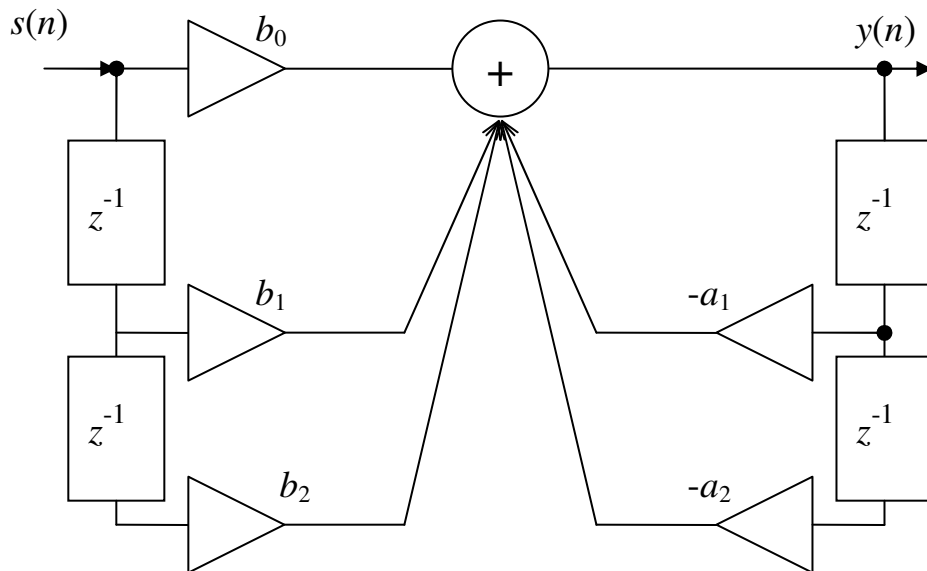


Рис. 3.5. Прямая структура РЦФ 2-го порядка

В общем случае прямая структура РЦФ содержит  $[(N-1) + (M-1)]$  элементов задержки, из них:  $(N-1)$  – для предшествующих отсчетов воздействия и  $(M-1)$  – для предшествующих отсчетов реакции.

Для уменьшения числа элементов задержки разработана каноническая структура. Структуру называют канонической, если число элементов задержки в ней минимально и равно порядку передаточной функции –  $\max\{(M-1), (N-1)\}$ .

Прямая каноническая структура 1 определяется эквивалентным представлением передаточной функции  $H(z)$  в виде произведения двух передаточных функций:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = \frac{V(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y(z)}{V(z)} = H_1(z)H_2(z),$$

одна из которых описывает рекурсивную часть ЦФ:

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

а вторая – нерекурсивную:

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}.$$

Передаточным функциям  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ , согласно их определению, соответствуют разностные уравнения:

$$v(n) = s(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k), \quad y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k v(n-k),$$

отображаемые прямыми структурами.

На рис. 3.6 показана прямая структура звена 2-го порядка.

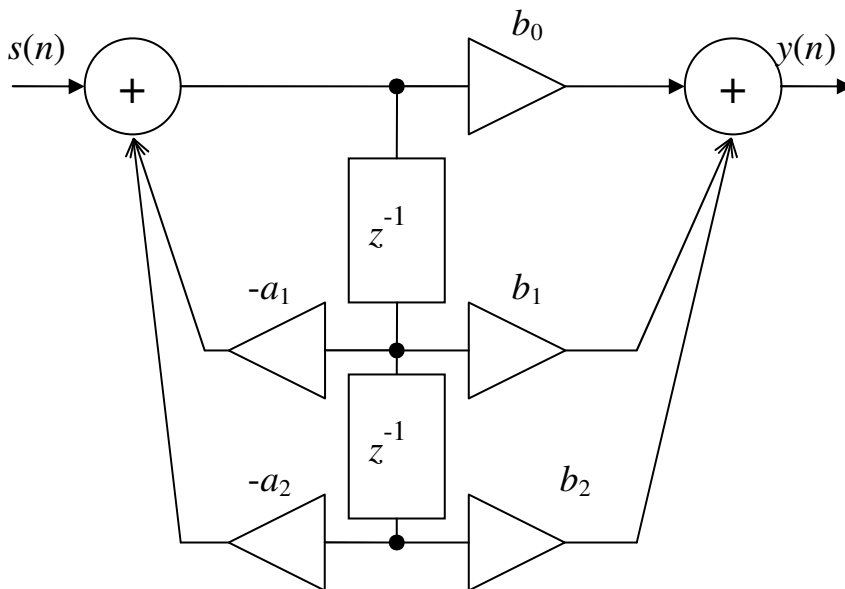


Рис. 3.6. Прямая каноническая структура 1 РЦФ 2-го порядка

Аналогичные канонические структуры 1 типа имеют РЦФ меньшего и большего порядков.

Каноническая структура 2 (рис. 3.7) определяется другим эквивалентным представлением передаточной функции  $H(z)$  и системой разностных уравнений:

$$H(z) = b_0 + \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \left[ (b_1 - b_0 a_1) z^{-1} + (b_2 - b_0 a_2) z^{-2} \right];$$

$$\begin{cases} y(n) = b_0 s(n) + (b_1 - b_0 a_1) v(n-1) + (b_2 - b_0 a_2) v(n-2); \\ v(n) = s(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2). \end{cases}$$

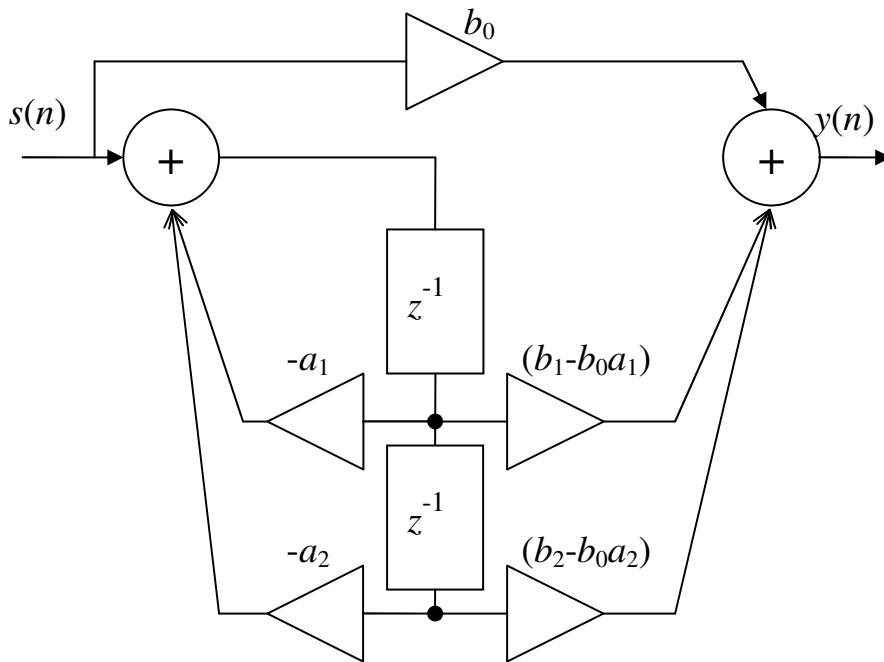


Рис. 3.7. Каноническая структура 2 РЦФ 2-го порядка

На рис. 3.8 приведена каноническая структура 3 РЦФ 2-го порядка. В этом случае передаточная функция и разностное уравнение имеют вид:

$$\begin{cases} H(z) = b_0 + z^{-1} H_1(z); \\ H_1(z) = [b_1 - a_1 H(z)] + z^{-1} H_2(z); \\ H_2(z) = b_2 - a_2 H(z). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(n) = b_0 s(n) + v_1(n-1); \\ v_1(n) = b_1 s(n) - a_1 y(n) + v_2(n-1); \\ v_2(n) = b_2 s(n) - a_2 y(n). \end{cases}$$



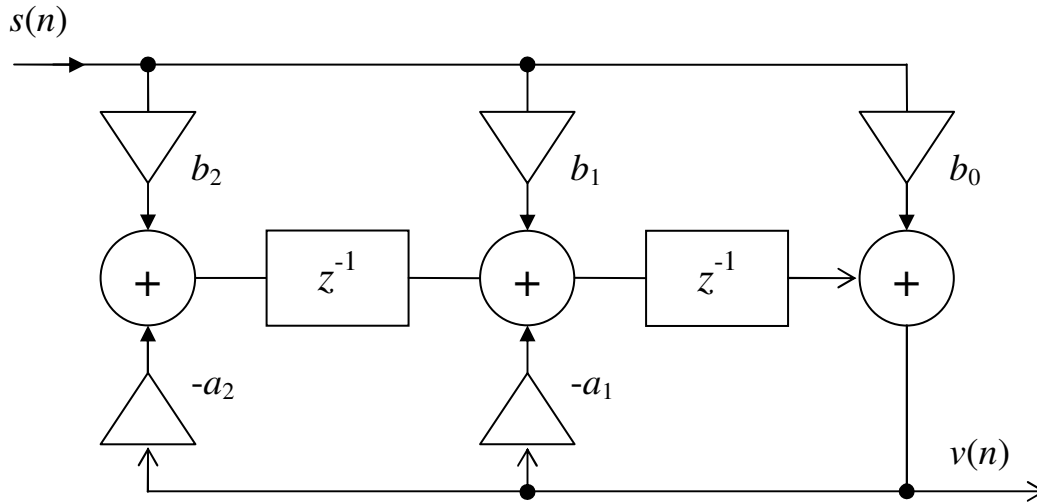


Рис. 3.8. Каноническая структура 3 РЦФ 2-го порядка

### 3.2.2. Каскадная структура

Каскадная структура определяется передаточной функцией  $H(z)$ , представленной в виде произведения множителей второго порядка:

$$H(z) = \prod_{i=1}^K H_k(z) = \prod_{i=1}^K \left( \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \right),$$

где  $b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}, a_{1i}, a_{2i}$  – вещественные коэффициенты;  
 $K$  – количество РЦФ 2-го порядка.

При прямой структуре всех звеньев данному виду передаточной функции соответствует система разностных уравнений:

$$\begin{cases} v_1(n) = b_{01}s(n) + b_{11}s(n-1) + b_{21}s(n-2) - a_{11}v_1(n-1) - a_{21}v_1(n-2); \\ v_2(n) = b_{02}v_1(n) + b_{12}v_1(n-1) + b_{22}v_1(n-2) - a_{12}v_2(n-1) - a_{22}v_2(n-2); \\ \dots \\ y(n) = b_{0,K-1}v_{K-1}(n) + b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1) + b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2) - a_{1,K-1}y(n-1) - \\ - a_{2,K-1}y(n-2), \end{cases}$$

из которой следует, что реакция  $i$ -го звена –  $I = 1, 2, \dots, (K-1)$ , служит воздействием для  $(i+1)$ -го звена, поэтому данная система отображается каскадным соединением РЦФ 2-го порядка – каскадной (последовательной) структурой (рис. 3.9).

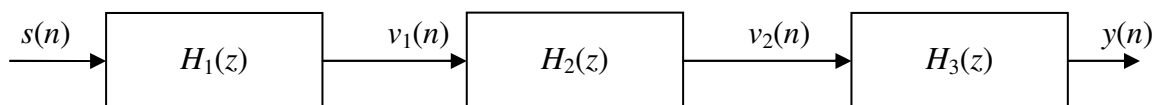


Рис. 3.9. Каскадная структура из трех РЦФ 2-го порядка

### 3.2.3. Параллельная структура

Параллельная структура определяется передаточной функцией  $H(z)$ , представленной в виде суммы дробей второго порядка (в частном случае) [11]:

$$H(z) = \sum_{i=1}^K H_i(z) = \sum_{i=1}^K \left( \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \right),$$

где  $b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}, a_{1i}, a_{2i}$  – вещественные коэффициенты,  
 $K$  – количество звеньев 2-го порядка.

Разностное уравнение определяется:

$$y(n) = \sum_{i=1}^K v_i(n),$$

где  $v_i(n) = b_{0i}x(n) + b_{1i}s(n-1) + b_{2i}s(n-2) - a_{1i}v_i(n-1) - a_{2i}v_i(n-2)$ .

Из разностного уравнения для параллельной структуры следует, что воздействие для всех РЦФ одинаковое, а реакция равна сумме реакций отдельных РЦФ, поэтому данное РУ отображается параллельным соединением рекурсивных звеньев 2-го порядка – параллельной структурой (рис. 3.10).

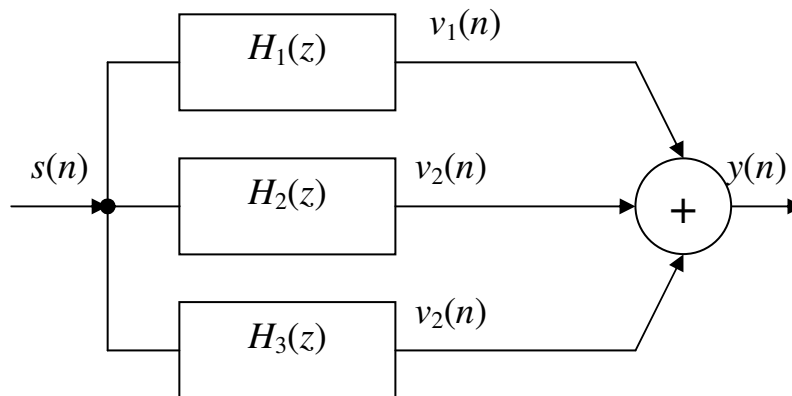


Рис. 3.10. Параллельная структура из трех РЦФ 2-го порядка

### 3.2.4. Структуры НЦФ

Передаточная функция НЦФ может рассматриваться как частный случай  $H(z)$  общего вида при  $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, M-1$ . В этом случае знаменатель  $H(z)$  оказывается равным 1.

НЦФ соответствуют два основных типа структур: прямая и каскадная.

Прямая структура (рис. 3.11) определяется передаточной функцией  $H(z)$ , представленной в виде рациональной функции:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k},$$

и отображает разностное уравнение:  $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k s(n-k)$ .

Каскадная структура определяется передаточной функцией, представленной в виде произведения множителей второго порядка:

$$H(z) = \prod_{i=1}^K H_i(z) = \prod_{i=1}^K (b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}),$$

где  $b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}$  – вещественные коэффициенты;  
 $K$  – количество НЦФ 2-го порядка.

Система разностных уравнений НЦФ звеньев 2-го порядка описывается:

$$\begin{cases} v_1(n) = b_{01}s(n) + b_{11}s(n-1) + b_{21}s(n-2); \\ v_2(n) = b_{02}v_1(n) + b_{12}v_1(n-1) + b_{21}v_1(n-2); \\ \dots \\ y(n) = b_{0,K-1}v_{K-1}(n) + b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1) + b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2). \end{cases}$$

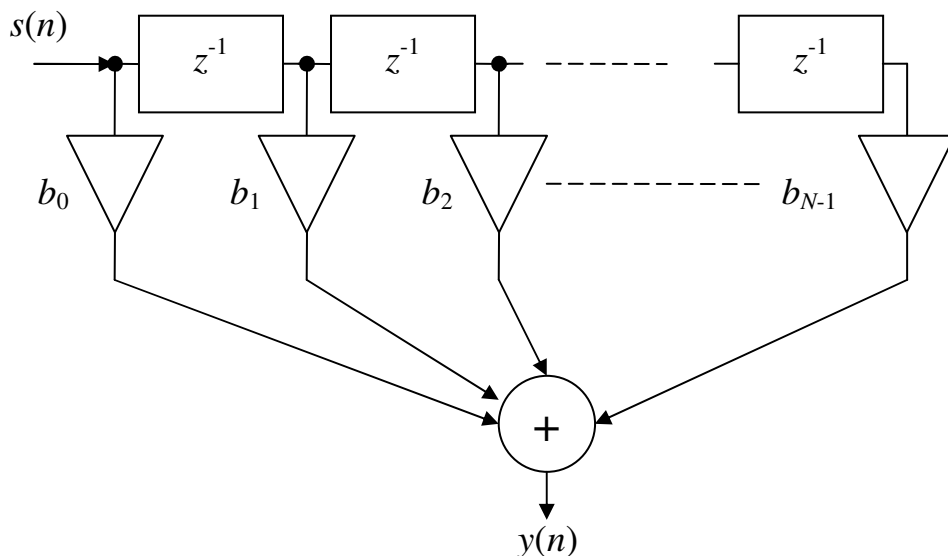


Рис. 3.11. Прямая структура НЦФ

Поскольку одна и та же передаточная функция может быть представлена в разных видах, возникает вопрос о выборе структуры ЦФ, для решения которого прежде всего используются следующие положения:

- для ЦФ вид передаточной функции определяется методом синтеза, тем самым структура по существу оказывается автоматически выбранной: для рекурсивных фильтров обычно она каскадная или параллельная, а для не-рекурсивных – прямая приведенная;
- при выборе структуры отдельных ЦФ и последовательности их расположения в каскадном соединении необходимо иметь в виду, что от этого зависит погрешность вычислений – собственные шумы системы.

### 3.3. Частотные характеристики и элементы синтеза ЦФ

#### 3.3.1. Общие сведения

Частотной характеристикой (ЧХ)  $H(e^{j2\pi\hat{f}})$  дискретного фильтра называется отношение преобразования Фурье выходной последовательности к преобразованию Фурье входной последовательности при нулевых начальных условиях [11]:

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = \frac{F\{y_n\}}{F\{x_n\}} = \frac{Y\{e^{j2\pi\hat{f}}\}}{X\{e^{j2\pi\hat{f}}\}}.$$

Частотная характеристика представляет собой коэффициент передачи фильтра для каждого значения частоты  $\hat{f} = \frac{f}{f_D} = fT$ .

Из сравнения выражений для частотной характеристики и передаточной функции видно, что ЧХ равна передаточной функции фильтра, вычисленной на единичной окружности  $z$ -плоскости (при  $z = e^{j2\pi\hat{f}} = e^{j\varphi}$ ):

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = H(z) \Big|_{z = e^{j2\pi\hat{f}}}.$$

Можно установить связь между значениями нормированной частоты  $\hat{f}$  и соответствующим углом  $\varphi$  в  $z$ -плоскости. Поскольку:

$$e^{j2\pi\hat{f}} = \cos 2\pi\hat{f} + j \sin 2\pi\hat{f} = e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi,$$

то  $\hat{f} = \varphi / 2\pi$ .

На рис. 3.12 показана связь точек единичной окружности и частот  $\hat{f}$ :

– точке  $z = 1 = \cos 0 + j \sin 0$  соответствует  $\hat{f} = 0$ ;

– точкам  $z = \pm j = \cos(\pm\pi/2) + j \sin(\pm\pi/2)$  соответствуют  $\hat{f} = \pm 0.25$ .

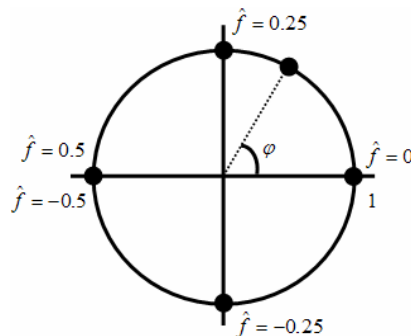


Рис. 3.12. Связь точек единичной окружности и частот  $\hat{f}$

Подставляя значения нормированной частоты, получаем:

$$e^{j2\pi\hat{f}} = \cos 2\pi\left(\pm\frac{1}{4}\right) + j \sin 2\pi\left(\pm\frac{1}{4}\right) = \pm j ,$$

Точке  $z = -1 = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pm\pi)$  соответствуют  $\hat{f} = \pm 0.5$ .

### 3.3.2. Характеристики КИХ-фильтров и БИХ-фильтров

Используя выражения для передаточных функций для нерекурсивных и рекурсивных фильтров, можно записать общие формулы для частотных характеристик дискретных фильтров [11].

КИХ-фильтр:

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j2\pi\hat{f}k} . \quad (3.5)$$

БИХ-фильтр:

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j2\pi\hat{f}k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j2\pi\hat{f}k}\right)} . \quad (3.6)$$

Как уже известно, частотная характеристика  $H(e^{j2\pi\hat{f}})$  – комплексная функция. Ее можно представить в виде:

$$H(e^{j2\pi\hat{f}}) = H_{\text{Re}}(e^{j2\pi\hat{f}}) + jH_{\text{Im}}(e^{j2\pi\hat{f}}) = A(\hat{f}) \cdot e^{j\varphi(\hat{f})} .$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется функция

$$A(\hat{f}) = \left| H(e^{j2\pi\hat{f}}) \right| = \sqrt{H_{\text{Re}}^2(e^{j2\pi\hat{f}}) + H_{\text{Im}}^2(e^{j2\pi\hat{f}})} .$$

Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) называется функция

$$\varphi(\hat{f}) = \arg H(e^{j2\pi\hat{f}}) = \tan^{-1}(H_{\text{Im}}(e^{j2\pi\hat{f}})/H_{\text{Re}}(e^{j2\pi\hat{f}})) .$$

АЧХ устанавливает связь между амплитудами, а ФЧХ – между фазами выходного  $y(n)$  и входного  $s(n)$  сигналов фильтра.

Если  $s(n) = A_{\text{ex}} \cdot \cos(2\pi\hat{f}n + \varphi_{\text{ex}})$ , то в установившемся режиме:

$$y(n) = A_{\text{bix}} \cdot \cos(2\pi\hat{f}n + \varphi_{\text{bix}}) ,$$

где  $A_{\text{bix}} = A_{\text{ex}} \cdot A(\hat{f})$ ,

$$\varphi_{\text{bix}} = \varphi_{\text{ex}} + \varphi(\hat{f}) .$$

Общие формулы АЧХ КИХ-фильтра и БИХ-фильтра имеют вид:

$$A_{КИХ}(\hat{f}) = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos 2\pi \hat{f} k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin 2\pi \hat{f} k\right)^2},$$

$$A_{БИХ}(\hat{f}) = \sqrt{\frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos 2\pi \hat{f} k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin 2\pi \hat{f} k\right)^2}{\left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \cos 2\pi \hat{f} k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \sin 2\pi \hat{f} k\right)^2}}.$$

Частотную характеристику можно рассматривать как спектр импульсной характеристики:

$$H(e^{j2\pi \hat{f}}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-j2\pi \hat{f} k}.$$

Следовательно, свойства ЧХ фильтра во многом совпадают со свойствами спектра дискретного сигнала. Ниже приведены основные свойства частотных характеристик дискретных фильтров [11]:

- частотная характеристика является периодической функцией по частоте, с периодом, равным частоте дискретизации;
- АЧХ и ФЧХ также являются периодическими функциями с тем же периодом;
- для фильтров с вещественными коэффициентами АЧХ – четная функция, а ФЧХ – нечетная функция;
- для полного описания частотной характеристики фильтра с вещественными коэффициентами достаточно задать ее в основной полосе частот  $\hat{f} \in [0, 0.5]$ .

Дискретный фильтр называют нормированным, если максимальное значение АЧХ равно 1. Нормировка фильтра достигается путем умножения коэффициентов числителя передаточной функции на нормирующий множитель  $q_n = 1/A_{\max}$ , где  $A_{\max}$  – максимальное значение АЧХ на интервале  $\hat{f} \in [0, 0.5]$ .

Рассмотрим требования к частотно-избирательным ЦФ. На рис. 3.13 представлены идеальные АЧХ фильтров: НЧ, ВЧ, полосового и режекторного, которые, вследствие их физической невозможности, необходимо аппроксимировать при заранее определяемых допусках, зависящих от ряда практических ограничений. Эти ограничения связаны, прежде всего, с назначением синтезируемого фильтра. Все ограничения и допуски составляют требования, предъявляемые к фильтру.

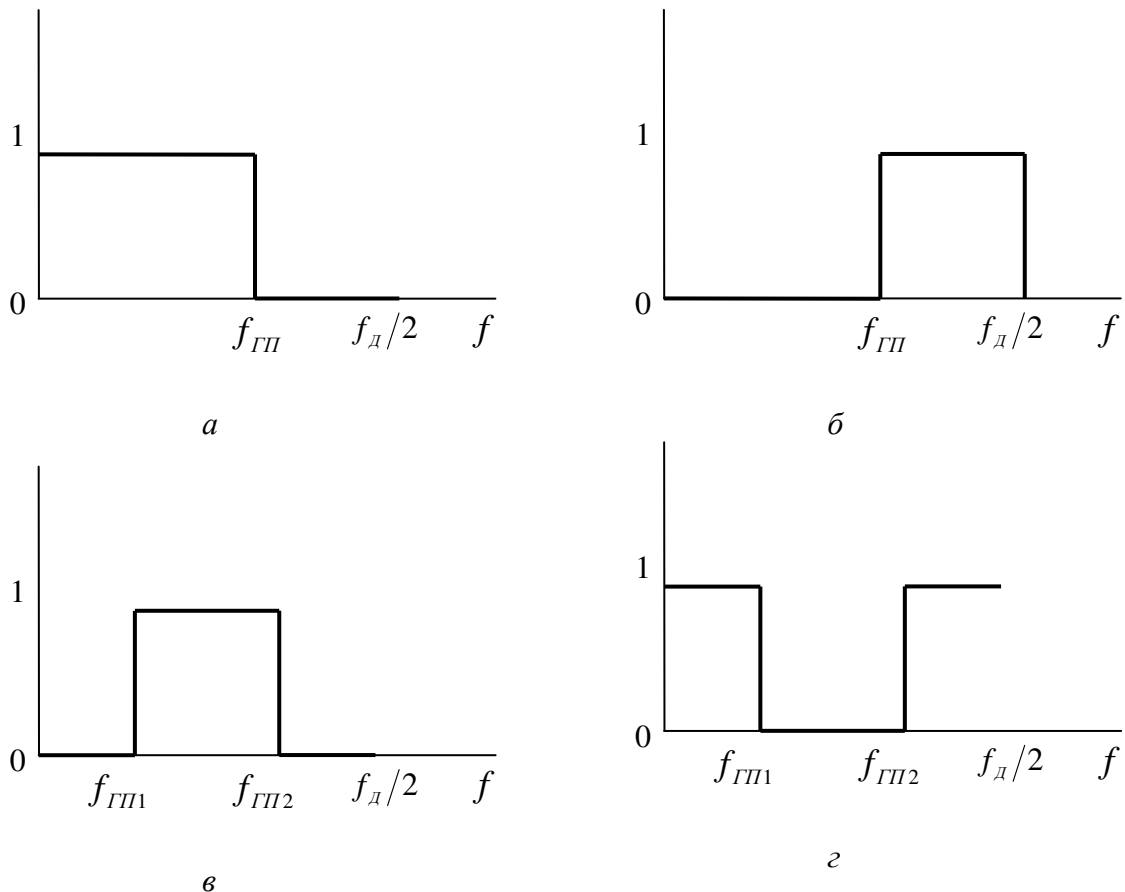


Рис. 3.13. Идеальные АЧХ фильтров:  
а) НЧ, б) ВЧ, в) полосового, г) режекторного

*Основные требования к фильтрам включают в себя [11]:*

- задание частоты дискретизации  $f_{\text{Д}}$  [Гц] и типа избирательности фильтра (НЧ, ВЧ и т. д.);
- задание требований к АЧХ  $A(f)$  или к характеристике ослабления (затухания)  $\alpha(f)$ , представляющей собой логарифмическую АЧХ.

При этом необходимо помнить, что:

- задание требований начинается с установки всех граничных частот фильтра только в основной полосе частот  $0 \leq f \leq f_{\text{Д}}/2$ ;
- требования в переходных полосах избирательных фильтров не задаются;
- требования формулируются в виде допустимых отклонений от нормированной АЧХ  $\hat{A}(f)$  [или от  $\alpha(f)$ ] в полосах пропускания и задерживания и отображаются на диаграмме допусков;
- АЧХ  $A(f)$  является безразмерной величиной и выражается в абсолютных единицах;

– характеристики ослабления и затухания обозначаются одинаково  $a(f)$ , размерность  $a(f)$  выражается в децибелах, связь между  $A(f)$  и характеристикой ослабления  $a(f)$  определяется формулой:

$$a(f) = 20 \lg \hat{A}(f),$$

а при отображении требований в виде характеристики затухания:

$$a(f) = -20 \lg \hat{A}(f);$$

– выбор метода аппроксимации АЧХ  $\hat{A}(f)$  (или  $a(f)$ ).

Рассмотрим пример реализации полосового КИХ-фильтра [11].

Начальные условия: тип – полосовой; аппроксимация – по Чебышеву; частота дискретизации  $f_d = 48$  кГц; граничные частоты  $f_{з1} = 7,2$  кГц;  $f_{зн1} = 9,6$  кГц;  $f_{зн2} = 12,96$  кГц;  $f_{з2} = 15,36$  кГц; допуски на отклонение АЧХ от номинального уровня в полосе пропускания  $\epsilon_n = 0,05$  и в полосе задерживания  $\epsilon_z = 0,01$ ; коэффициенты квантованы до 24 бит,  $N = 35$ .

Важным является то обстоятельство, что в соответствии с методом синтеза КИХ-фильтров отклонение АЧХ задается симметрично, а для БИХ-фильтров отклонение задается только в одну сторону так, чтобы АЧХ не превышала единицы. Переходная полоса располагается между полосами пропускания и задерживания, ее ширина  $\Delta f_{ПЗ} = f_k - f_\chi$ .

*Полосовой фильтр (ПФ)* характеризуется пятью частотными полосами (рис. 3.14), из которых центральная полоса пропускания, две полосы задерживания и две переходных полосы. На рис. 3.14 обозначены [11]:

- $f_{ГЗ1}$  – граничная частота первой полосы задерживания;
- $f_{ГП1}$  – левая частота среза полосы пропускания;
- $f_{ГП2}$  – правая частота среза полосы пропускания, ширина полосы пропускания  $\Delta f_{ПП} = f_{ГП2} - f_{ГП1}$ ;
- $f_{ГЗ2}$  – граничная частота второй полосы задерживания.

Расчет коэффициентов фильтра выполняется на ЭВМ с помощью специальных прикладных пакетов, например MATLAB. Для заданного фильтра коэффициенты представлены в таблице 3.2 [11], АЧХ – на рис. 3.14 [11].

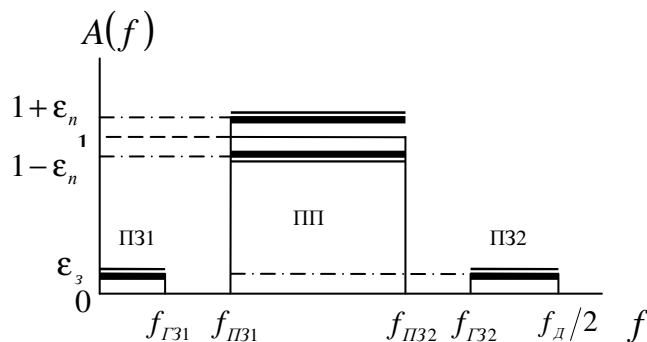


Рис. 3.14. Диаграмма требований к АЧХ ПФ



Таблица 3.2

Рассчитанные коэффициенты фильтра

$i$	$b_k, \quad k = i + j$				
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
0	-0,0058384	-0,0002581	0,0186806	0,0069064	-0,0268698
5	-0,0114828	0,0221347	0,0109901	-0,0019101	0,0148118
10	-0,0294373	-0,0680606	0,0525404	0,1389393	-0,0501657
15	-0,2012113	0,0208654	0,2256697	0,0208654	-0,2012113
20	-0,0501657	0,1389393	0,0525404	-0,0680606	-0,0294373
25	0,0148118	-0,0019101	0,0109901	0,0221347	-0,0114828
30	-0,0268698	0,0069064	0,0186806	-0,0002581	-0,0058384

Согласно заданию, граничные частоты  $f_{z31} = 7,2$  кГц;  $f_{zn1} = 9,6$  кГц;  $f_{zn2} = 12,96$  кГц;  $f_{z32} = 15,36$  кГц.

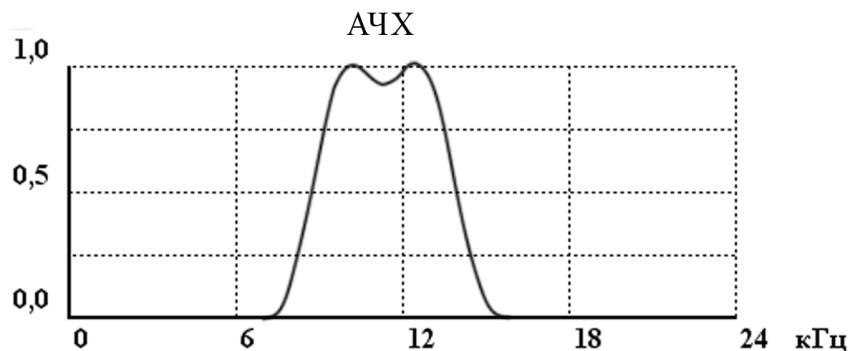


Рис. 3.15. Рассчитанная АЧХ фильтра

### 3.4. Реализация алгоритмов ЦОС на процессорах

Цифровую обработку сигналов в реальном времени можно разбить на две категории [2]: потоковая обработка, например, цифровая фильтрация, где данные обрабатываются по выборке за такт, и блочная обработка, например, нахождение БПФ и корреляции, где за такт обрабатывается блок данных фиксированной длины. Для реализации алгоритмов ЦОС в реальном времени требуется и программное, и аппаратное обеспечение. В качестве аппаратной поддержки можно использовать матрицы процессоров, стандартные микропроцессоры, чипы ЦОС или микропрограммируемые специализированные устройства. Программной поддержкой служат коды или микрокоды на языке ассемблера низкого уровня, «родном» для аппаратуры ЦОС, и/или коды на эффективном языке высокого уровня, таком как С или С++. В настоящее время обычно используют именно языки высокого уровня, особенно с новейшими процессорами ЦОС, имеющими сложную структуру.

В число распространенных процессоров ЦОС входят такие устройства с фиксированной запятой, как TMS320C55x от Texas Instruments и DSP563x от Motorola, и такие устройства с плавающей запятой, как TMS320C4x (Texas Instruments) и ADSP21xxx SHARC (Analog Devices).

### **3.4.1. Компьютерные архитектуры обработки сигналов**

Большинство доступных сейчас универсальных процессоров основаны на архитектуре фон Неймана, при которой операции выполняются последовательно. Упрощенная архитектура стандартного процессора фон Неймана показана на рис. 3.16 [2]. При обработке инструкции в таком процессоре блоки процессора, не задействованные в каждой фазе инструкции, находятся в холостом состоянии до передачи им управления. Повышение скорости процессора достигается за счет ускорения работы отдельных блоков, хотя существует определенный предел, ограничивающий их возможную скорость работы.

Если устройство должно работать в реальном времени, архитектуру процессора ЦОС нужно оптимизировать под выполнение функций ЦОС. Например, на рис. 3.17 показана общая аппаратная архитектура, подходящая для цифровой обработки сигналов в реальном времени.

Она характеризуется следующими особенностями [2]:

1. Многошинная структура с отдельной памятью для данных и инструкций программы. Обычно память для хранения данных содержит входные данные, промежуточные значения и выходные выборки, а также фиксированные коэффициенты, например, для цифровой фильтрации или БПФ. Команды программы хранятся в специально отведенных ячейках памяти.

2. Порт ввода-вывода позволяет обмениваться данными со внешними устройствами (АЦП, ЦАП) или передавать цифровые данные другим процессорам. Прямой доступ к памяти (Direct Memory Access – DMA) (если он есть) позволяет быстро обмениваться блоками данных с памятью (ОЗУ) для хранения данных, причем обычно это происходит под внешним управлением.

3. Арифметические устройства для логических и арифметических операций, в число которых выходят АЛУ, аппаратные умножители и схемы сдвига (или умножители-накопители).

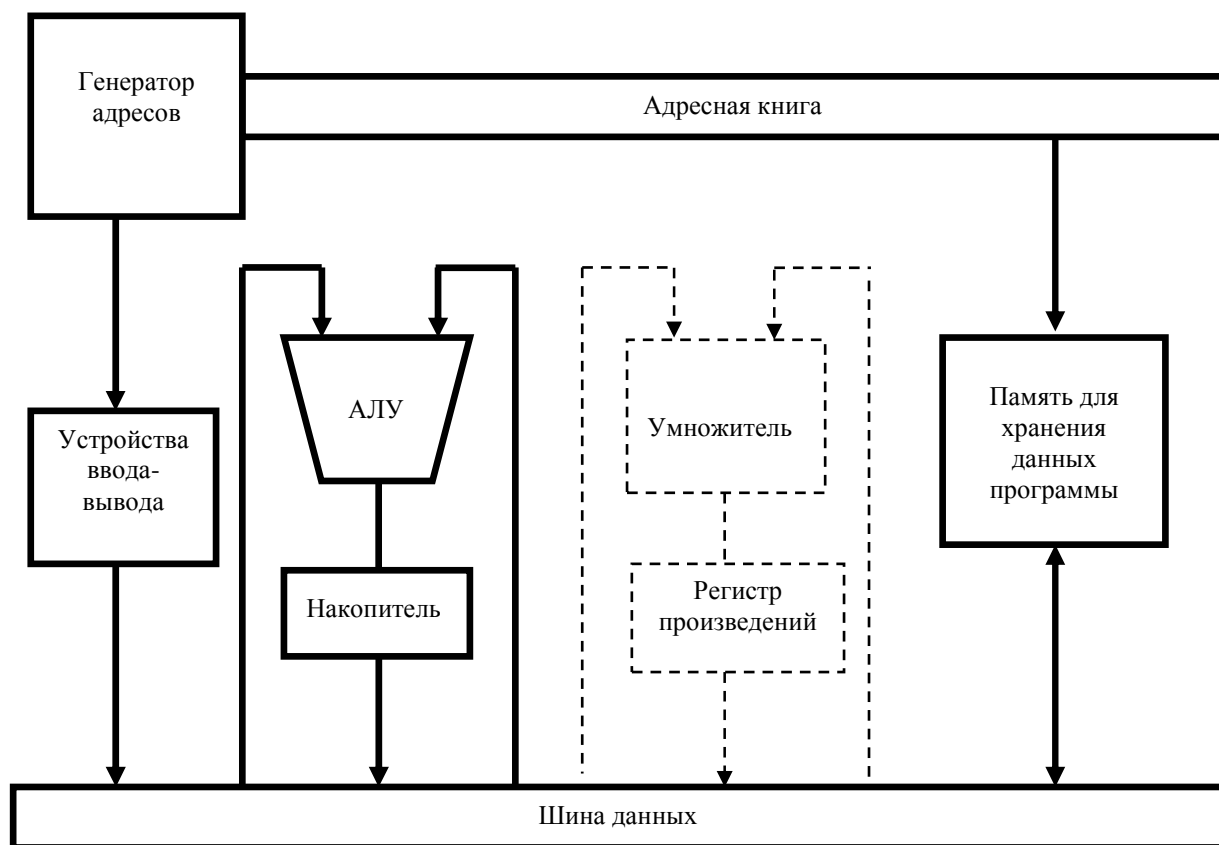


Рис. 3.16. Упрощенная архитектура стандартных процессоров

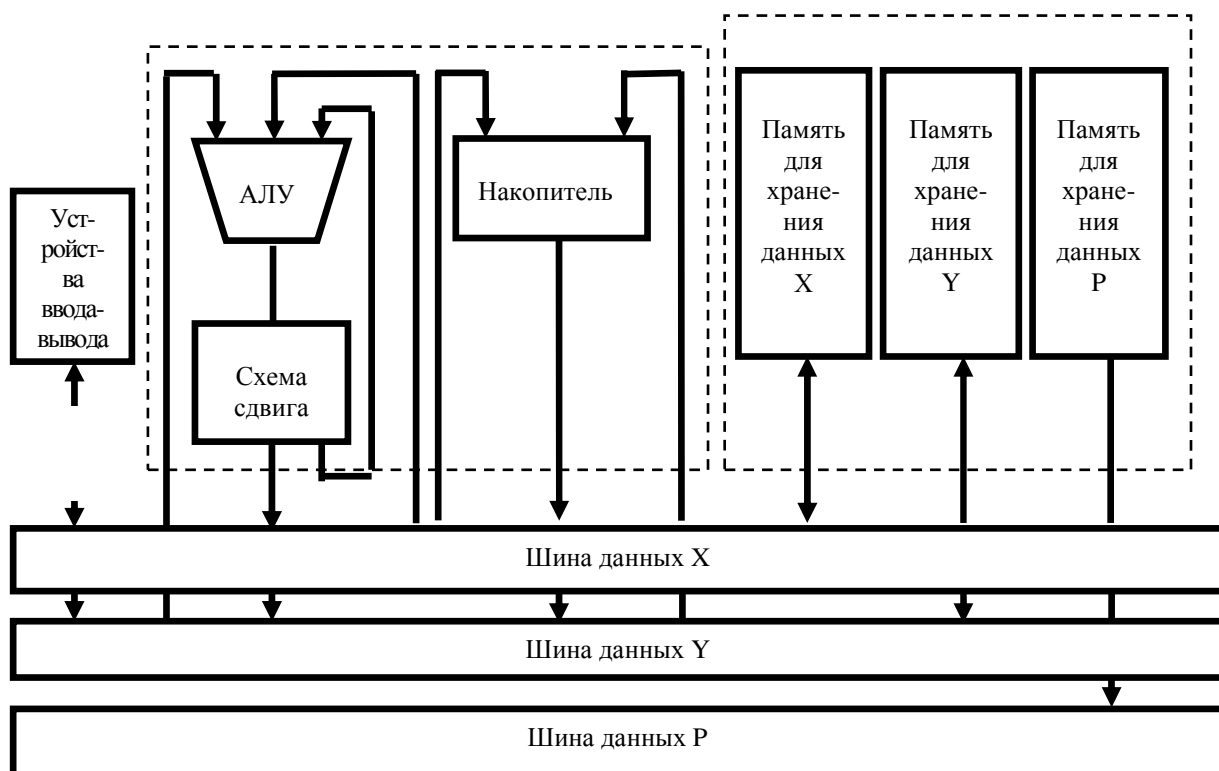


Рис. 3.17. Стандартная универсальная аппаратная архитектура обработки сигналов

Большинство алгоритмов ЦОС (фильтрация, корреляция, преобразование Фурье) включают повторяющиеся арифметические операции, такие как умножение, сложение, обращение к памяти и интенсивная передача данных через центральный процессор. Архитектура стандартных микропроцессоров не предназначена для такого типа деятельности. При разработке аппаратуры ЦОС важно оптимизировать под операции ЦОС и аппаратную архитектуру, и систему команд. В процессорах ЦОС для этого широко используется концепция параллелизма.

В частности, применяются следующие средства [2]:

- гарвардская архитектура;
- конвейерная обработка;
- быстрые специализированные аппаратные умножители-накопители;
- специальные команды, предназначенные для ЦОС;
- копирование;
- встроенная память/кэш;
- расширенный параллелизм – векторная архитектура (SIMD), архитектура с командными словами сверхбольшой длины (VLIW) и статическая суперскалярная обработка.

### 3.4.2. Реализация КИХ-фильтров

В программе 3.1 представлен фрагмент реализации на языке С общего КИХ-фильтра [2]. При фильтрации в реальном времени предполагается, что данные и коэффициенты хранятся в памяти, как показано на рис. 3.18, *а*.

<i>а)</i>				<i>б)</i>			
Коэффициенты		Данные		Коэффициенты		Данные	
$b(0)$		$s(n)$		$b(N-1)$		$s(n)$	
$b(1)$		$x(n-1)$		$b(N-2)$		$x(n-1)$	
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$b(N-2)$		$x[n-(N-2)]$		$b(1)$		$x[n-(N-2)]$	
$b(N-1)$		$x[n-(N-1)]$		$b(0)$		$x[n-(N-1)]$	

Рис. 3.18. Карты памяти коэффициентов и данных:

*а)* традиционные; *б)* альтернативные

*Программа 3.1. Псевдокод С для выполнения КИХ-фильтрации.*

$mn1=N-1;$

$yn=0;$

```

    for (k=0; k,mn1; ++k) { /* данные смещаются, чтобы освободить место
для новой выборки */
        x[mn1-k]=x[mn1-k-1];
        x[0]=xn;
    }
    for (k=0; k,N; ++k) {
        yn=yn+b[k]*x[k];      /* данные фильтруются и вычисляется
                               выходная выборка*/
    }
    return (yn);              /* выходная выборка фильтра */

```

Предположим, что данные на трехкоэффициентный КИХ-фильтр поступают с АЦП. Первое, что нужно сделать – выделить два набора соседствующих ячеек памяти (в ОЗУ), один для хранения входных данных ( $s(n), s(n-1), s(n-2)$ ), а другой для хранения коэффициентов фильтра, ( $b(0), b(1), b(2)$ ), как показано ниже:

ОЗУ данных	Память коэффициентов
0	$b(0)$
0	$b(1)$
0	$b(2)$

Во время инициализации значения ячеек ОЗУ, в которых планируется хранить выборки данных, обнуляются, поскольку фильтр всегда начинает работу, не имея данных. Затем выполняются следующие операции [2]:

1. *Первый момент выборки.* Считывается выборка данных с АЦП, ОЗУ данных смещается на одну позицию (чтобы освободить место для новых данных), сохраняется новая входная выборка, вычисляется выходная выборка, а затем выходная выборка посылается ЦАП:

ОЗУ данных	Память коэффициентов	
$\rightarrow s(1)$	$b(0)$	$y(1) = b(0)s(1) + b(1)s(0) + b(2)s(-1)$
0	$b(1)$	
0	$b(2)$	

2. *Второй момент выборки.* Повторяются описанные выше действия, и новая выходная выборка посылается ЦАП:

ОЗУ данных	Память коэффициентов	
$\rightarrow s(2)$	$b(0)$	$y(2) = b(0)s(2) + b(1)s(1) + b(2)s(0)$
$s(1)$	$b(1)$	
$0$	$b(2)$	

3. *Третий момент выборки.* Повторяются описанные выше действия, и новая выходная выборка посылается ЦАП:

ОЗУ данных	Память коэффициентов	
$\rightarrow s(3)$	$b(0)$	$y(3) = b(0)s(3) + b(1)s(2) + b(2)s(1)$
$s(2)$	$b(1)$	
$s(1)$	$b(2)$	

4. *Четвертый момент выборки.* Повторяются описанные выше действия, и новая выходная выборка посылается ЦАП:

ОЗУ данных	Память коэффициентов	
$\rightarrow s(4)$	$b(0)$	$y(4) = b(0)s(4) + b(1)s(3) + b(2)s(2)$
$s(3)$	$b(1)$	
$s(2)$	$b(2)$	

Старейшая входная выборка удалена из памяти.

5. *Момент выборки  $n$ .* Повторяются описанные выше действия, и новая выходная выборка посылается ЦАП:

ОЗУ данных	Память коэффициентов	
$\rightarrow s(n)$	$b(0)$	$y(n) = b(0)s(n) + b(1)s(n-1) + b(2)s(n-2)$
$s(n-1)$	$b(1)$	
$s(n-2)$	$b(2)$	

Альтернативным подходом к реализации КИХ-фильтров на процессорах ЦОС является использование круговых буферов. Очевидно, что в КИХ-фильтрации содержимое памяти коэффициентов статично, а вот память данных меняется с поступлением каждой новой входной выборки. С точки

зрения эффективности выгоднее подавать последующие выборки данных в раздвижное окно, удаляя старейшие выборки из памяти. Для обработки изменений в блоке входных данных, используемых при КИХ-фильтрации, можно применять круговой буфер, при этом данные не придется сдвигать, как в линейных буферах [2].

### 3.4.3. Расчет БПФ

На вход бабочки с прореживанием по времени в общем случае подаются два значения  $A$  и  $B$ , по которым вычисляется пара выходов:

$$A' = A + BW_N^k,$$

$$B' = A - BW_N^k.$$

Входные и выходные выборки данных, а также настроечные параметры являются комплексными и в общем виде их можно выразить следующим образом:

$$A = A_{re} + jA_{im},$$

$$B = B_{re} + jB_{im},$$

$$W_N^k = e^{-2\pi jk/N} = \cos(2\pi k / N) - j \sin(2\pi k / N).$$

где  $re$  – индекс, который обозначает действительную часть величины,  
 $im$  – индекс, который обозначает мнимую часть величины.

Операция «бабочка», как известно, включает действия с комплексной арифметикой, но на практике она часто выполняется с использованием действительной арифметики. Чтобы выразить эту операцию в форме, подходящей для действительной арифметики, произведение  $B$  и  $W$  имеет следующий вид:

$$BW_N^k = B_{re} \cos(X) + B_{re} \sin(X) + j[B_{im} \cos(X) - B_{re} \sin(X)],$$

где  $X = 2\pi k / N$ .

Используя подстановку, получаем:

$$A' = A_{re} + [B_{re} \cos(X) + B_{im} \sin(X)] + j\{A_{im} + [B_{im} \cos(X) - B_{re} \sin(X)]\},$$

$$B' = B_{re} - [B_{re} \cos(X) + B_{im} \sin(X)] + j\{A_{im} - [B_{im} \cos(X) - B_{re} \sin(X)]\}.$$

Теперь выходы «бабочки»  $A'$  и  $B'$  представлены в нужной форме. Следовательно, для данной пары комплексных точек  $A$  и  $B$  можно вычислить выход «бабочки», используя только действительную арифметику.

Вычисление синуса и косинуса в формуле является трудоемкой операцией. В БПФ реального времени эффективнее заранее вычислить действительную и мнимую части настроечного параметра и сохранить данные значения в таблице соответствий. Предварительный расчет значений настроечного параметра иллюстрируется в программе 3.2.

*Программа 3.2. Псевдокод C для предварительного расчета значений настроечного коэффициента [2].*

```
pi=6.28315307179586/N; for(k=0; k<N/2; ++k){  
X=k*pi;  
w.real[k]=cos[X];  
w.imag[k]=sin[X];  
}
```

В программе 3.3 приводится псевдокод C для двоичной «бабочки», значения настроечного параметра которой вычислены заранее и занесены в таблицу соответствий.

*Программа 3.3. Псевдокод C для расчета «бабочки» [2].*

```
t.real=br*w.real[k]+bi*w.imag;  
t.imag=bi*w.real[k]-br.w.imag[k];  
b.real[j]=a.real-t.real ;  
b.imag[ j ]=a.imag-t.imag ;  
a.real[j]=a.real+t.real;  
a.imag[j]=a.imag+t.imag;
```

Таким образом, алгоритмы ЦОС подразумевают трудоемкие арифметические операции, в частности, умножение и сложение с интенсивным потоком данных через центральный процессор. Эффективное выполнение подобных алгоритмов в реальном времени требует аппаратной архитектуры и набора команд, радикально отличающихся от архитектуры и команд стандартных микропроцессоров. В цифровых процессорах сигналов для этого используются гарвардская архитектура, конвейерная обработка и специализированное аппаратное обеспечение, например, быстрые аппаратные умножители-накопители и схемы сдвига, скоростная внешняя память, также в процессоры внедряется множество команд, ориентированных на ЦОС.

Чтобы удовлетворять требованиям таких многоканальных, вычислительно-интенсивных приложений, как современные модемы удаленного доступа к серверу, системы мобильной связи третьего поколения, обработка



мультимедийной информации, вводятся новые архитектуры. В частности, это архитектура VLIW (very long instruction word – с командными словами сверх-большой длины) и статическая суперскалярная архитектура, которые используются в последнем поколении процессоров ЦОС. В обеих архитектурах применяются множественные тракты обработки данных и арифметические устройства, также для повышения эффективности используется параллелизм на уровне команд.

#### **3.4.4. Структура и описание процессора TMS320VC5510/5510A**

Цифровые сигнальные процессоры с фиксированной точкой TMS320VC5510/5510A базируются на ядре TMS320C55х. Данная архитектура обладает высокой производительностью при низком энергопотреблении благодаря повышению параллелизма и снижению потребляемой мощности. ЦПУ обладает внутренней шинной структурой, состоящей из программной шины, трёх шин чтения данных, двух шин записи данных и вспомогательных шин для периферии и контроллера прямого доступа к памяти (DMA). Это позволяет выполнять вплоть до трех операций чтения данных и двух операций записи данных за один цикл. Параллельно этому, контроллер DMA может осуществить до двух операций перемещения данных без задействования ЦПУ.

Ядро ЦСП C55х обладает двумя модулями умножения-накопления (MAC), каждый из которых способен выполнять операции типа «умножение 17-бит × 17-бит» за один цикл. Центральное 40-битное арифметическо-логическое устройство (АЛУ) сопровождается вспомогательным 16-битным АЛУ. Сценарий совместного использования двух АЛУ определяется набором инструкций, обеспечивая оптимальную параллельную работу и снижение энергопотребления. Распределение ресурсов возложено на адресное устройство (АУ) и устройство данных (УД) ядра ЦСП C55х.

Семейством цифровых сигнальных процессоров C55х поддерживаются инструкции с переменным числом байт, что позволяет увеличить плотность кода. Модуль инструкций (МИ) осуществляет 32-битную выборку инструкций из внутренней либо внешней памяти и определяет очередь инструкций для программного модуля (ПМ). В свою очередь, ПМ декодирует инструкции, определяет задачи для АУ и УД и управляет защищенным конвейером. Для предотвращения переполнения конвейера при выполнении условных переходов используется предсказание переходов. Процессоры 5510/5510A также имеют встроенный кэш инструкций размером 24 Кбайт для снижения числа операций доступа к внешней памяти, повышения производительности и снижения энергопотребления.

Набор периферийных устройств процессоров 5510/5510A включает в себя интерфейс внешней памяти (EMIF), обеспечивающий непосредственное подключение различных типов асинхронной памяти, таких, как EPROM и SRAM, а также высокоскоростных запоминающих устройств высокой плотности, таких, как синхронные DRAM и SRAM с пакетной выборкой. Три полнодуплексных многоканальных буферизованных последовательных порта (McBSP) обеспечивают непосредственное подключение большого ряда устройств со стандартными последовательными интерфейсами и многоканальный обмен (до 128 каналов с индивидуальным запретом). Порт управляющего контроллера (EHPI) представляет собой 16-битный параллельный интерфейс, обеспечивающий внешнему управляющему процессору доступ к встроенной памяти процессоров 5510/5510A. Порт EHPI может быть сконфигурирован как в мультиплексный, так и в немultipлексный режим, что позволяет использовать его совместно с самыми различными управляющими процессорами. Контроллер прямого доступа к памяти (DMA) обеспечивает перемещение данных по шести независимым каналам без вмешательства ЦПУ, его суммарная пропускная способность составляет до двух 16-битных слов за цикл. Кроме этого, набор периферийных устройств включает в себя 2 таймера общего назначения, восемь выводов общего назначения (GPIO) и генератор с ФАПЧ и цифровым управлением (DPLL).

Процессоры 5510/5510A поддерживаются программным обеспечением eXpressDSP™, которое состоит из интегрированной среды разработки (IDE) Code Composer Studio™, PTOC DSP/BIOS™ и документации TMS320™ DSP Algorithm Standard, кроме этого, существует большое количество разработок сторонних производителей. IDE Code Composer Studio состоит из компилятора языка C, линкера Visual Linker, симулятора, поддержки обмена данными в реальном режиме времени Real-Time Data Exchange (RTDX™), драйверов эмулятора XDS510™ и библиотек Chip Support Libraries (CSL). DSP/BIOS представляет собой расширяемое модульное программное обеспечение, бесплатно доступное пользователям цифровых сигнальных процессоров фирмы Texas Instruments и состоящее в основном из планировщика задач и средств поддержки систем реального времени с весьма экономичным расходом памяти и других ресурсов процессора. TMS320 DSP Algorithm Standard – это набор спецификаций, выполнение которых обеспечивает совместимость кода, созданного различными разработчиками, что значительно облегчает его дальнейшую интеграцию в проекты.

Ядро процессоров TMS320C55x базируется на открытой архитектуре с добавлением специфических модулей, позволяющих значительно ускорить обработку некоторых алгоритмов. Данные модули обеспечивают процессорам

5510/5510A оптимальное соотношение производительности, присущей процессорам с фиксированной точкой, низкого энергопотребления и цены, что является уникальным сочетанием на рынке видеопроцессоров. Дополнительные модули обеспечивают процессорам 5510/5510A высокую производительность видеокодека, в то же время оставляя незадействованными более половины ресурсов ядра, что позволяет реализовывать параллельно такие функции, как преобразование цветовых схем, организация пользовательского интерфейса, функции безопасности, стек TCP/IP, распознавание голоса, преобразование текста в голос и т.д. В результате, цифровой сигнальный процессор 5510/5510A способен в одиночку решить практически все задачи, стоящие перед мобильными видеоустройствами [14].

Отличительные особенности:

1. Высокопроизводительное ядро для операций с фиксированной точкой с низким энергопотреблением TMS320C55™:

- a) время цикла 6.25/5 нс;
- b) тактовая частота 160/200 МГц;
- c) выполнение одной или двух инструкций за такт;
- d) два умножителя (производительность до 400 миллионов умножений с накоплением в секунду (MMACS));
- e) два арифметическо-логических устройства (АЛУ);
- f) внутренняя программная шина;
- g) три внутренних шины чтения данных/операндов;
- h) две внутренних шины записи данных/операндов.

2. Кэш инструкций (24 КБайта).

3. Встроенное ОЗУ 160К×16 бит, состоящее из:

i) 8 блоков по 4К×16 бит двухпортовой ОЗУ (DARAM) (всего 64 КБайт);

j) 32 блоков по 4К×16 бит однопортовой ОЗУ (SARAM) (всего 256 КБайт).

4. Встроенное ПЗУ 16К×16 бит (32 КБайт).

5. Общий объем адресуемой памяти 8М×16 бит.

6. 32-битный интерфейс внешней памяти (EMIF) с возможностью подключения памяти типа:

k) асинхронное статическое ОЗУ (SRAM);

l) асинхронное EEPROM;

m) синхронное динамическое ОЗУ (SDRAM);

n) синхронное статическое ОЗУ с пакетной выборкой (SBSRAM).

7. Программный контроль энергопотребления шести функциональных блоков из внутренних устройств.

8. Встроенные периферийные устройства:
  - о) два 20-битных таймера;
  - р) шестиканальный контроллер прямого доступа к памяти (DMA);
  - q) три многоканальных буферизованных последовательных порта (McBSP);
  - г) 16-битный параллельный порт управляющего контроллера (EHPI);
  - с) программируемый тактовый генератор с ФАПЧ;
  - т) портов ввода-вывода общего назначения (GPIO) и выход общего назначения (XF).
9. Встроенный эмулятор.
10. Поддержка периферийного сканирования по стандарту JTAG.
11. Питание ядра 1,6 В.
12. Питание портов ввода-вывода 3,3 В.

Память процессора состоит из адресов регистров и адресов данных программы, содержащей константы и тело программы. Обращение к памяти процессора может осуществляться по адресам. Аппаратно доступ к блокам, описанным в таблице 1, может осуществляться параллельно. Т. е. два доступа за один цикл (два чтения, две записи или чтение и запись). DRAM – *Dual-Access RAM* (Память с двойным доступом) [15].

### 3.5. Вопросы и задания для самопроверки

1. Представьте разностное уравнение, которое описывает ЦФ.
2. Для каких целей используется  $Z$ -преобразование и каким образом оно определяется?
3. Приведите пример прямого и обратного  $Z$ -преобразования сигнала.
4. По какому правилу определяется порядок РЦФ?
5. Приведите примеры разностных уравнений РЦФ (НЦФ).
6. Может ли РЦФ иметь конечную импульсную характеристику? Поясните ответ.
7. Каким образом можно определить импульсную характеристику ЦФ?
8. Что понимают под передаточной функцией ЦФ?
9. Известно разностное уравнение ЦФ  $y(n) = 0,5s(n) - 0,3s(n-1) - 0,7y(n-1) + 0,55y(n-2)$ . Запишите передаточную функцию.
10. Приведите классификацию структур ЦФ.
11. Для ЦФ из задания 9 представьте прямую структуру фильтра.
12. В чем преимущество канонической структуры ЦФ по сравнению с прямой?

## МОДУЛЬ 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

*Цель модуля* – изучение студентами методов и алгоритмов спектрального анализа и оценки параметров сигнала.

В результате изучения модуля студенты *должны знать*:

- методы спектрального анализа и оценки параметров сигнала;
- основные характеристики весовых функций, применяемых при спектральном анализе.

Студенты *должны уметь*:

- использовать алгоритмы спектрального анализа для обработки сигналов;
- а также иметь представление об областях использования методов спектрального анализа сигналов.

### 4.1. Анализ спектра на основе ДПФ

#### 4.1.1. Параметры анализаторов спектра

Спектральный анализ заключается в разложении сигнала на его частотные или спектральные составляющие и оценке или измерении их спектральных характеристик – амплитуды, фазы, мощности, спектральной плотности мощности и др. [4].

К задачам, решаемым методами спектрального анализа, относят [4]: обнаружение, разрешение и оценивание параметров сигналов, сжатие данных, выделение информативных признаков, идентификация объектов, распознавание образов и др. Для случайных сигналов с помощью спектрального анализа решается общая задача выявления скрытых периодичностей и статистических (корреляционных) связей. Спектральный анализ детерминированных периодических сигналов и сигналов конечной длительности называют также гармоническим анализом.

К методам спектрального анализа относят [2,4]: методы полосового анализа на основе цифровой фильтрации, методы на основе ДПФ, параметрические методы (на основе параметрических моделей случайных процессов). Кроме этого рассматривают методы текущего, скользящего и скачущего спектрального анализа, последовательного и параллельного, одноканального и многоканального, в реальном и нереальном режимах обработки.

К параметрам анализаторов спектра относятся [4]:

- число каналов анализа;
- время наблюдения или анализа (ширина окна)  $T_a = NT_D$  и соответствующее ему число отсчетов или длина  $N$  обрабатываемой реализации сигнала;

– полоса анализа  $\pm f_D/2$ , не превышающая для дискретных сигналов основной полосы спектра  $\pm f_D/2$ ;

– разрешение по частоте, обратно пропорциональное времени анализа:  $\Delta f_p \sim 1/T_a$  и соответствующее разности частот двух соседних разрешаемых (разделяемых) частотных составляющих сигнала.

Особенности спектрального анализа на основе ДПФ связаны с оценкой спектра сигнала по его реализациям конечной длины, т. е. на конечном интервале наблюдения. При этом полагается, что за пределами этого интервала сигнал равен нулю или является периодическим продолжением считанной реализации. Широкое применение анализаторов спектра на основе ДПФ обусловлено наличием алгоритмов БПФ.

#### 4.1.2. Базовая структура анализатора спектра на основе ДПФ и БПФ

В основе анализаторов спектра, использующих ДПФ, лежит базовая структура, приведенная на рис. 4.1 [4], которая реализует операции взвешивания и вычисления ДПФ. Выходом схемы является вектор ДПФ входной, в общем случае не ограниченной по длине, последовательности  $s(n)$ , усеченной весовой функцией  $w(n)$  конечной длины  $N$ :

$$\tilde{X}(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)w(n)e^{-j\omega_k n T_D} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}(n)e^{-j(2\pi/N)kn} = \text{ДПФ}_N[\tilde{s}(n)],$$

где  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ;

$n = 0, 1, \dots, N-1$ ;

$s(n)$  – входной сигнал;

$w(n)$  – весовая функция;

$\tilde{s}(n) = s(n)w(n)$  – преобразованная входная последовательность ДПФ;

$\omega_k = k\omega_D / N$  или  $f_k = kf_D / N$  – частоты анализа, называемые также бинами ДПФ [2]: 1 бин равен шагу дискретизации сигнала в частотной области  $f_D / N$ .

Анализатор имеет  $N$  разнесенных по частоте на 1 бин ( $f_D / N$ ) каналов анализа с центральными частотами  $\omega_k(f_k)$ , при этом значения  $k = 0, 1, \dots, N-1$  соответствуют номеру канала, номеру бина или номеру частотной выборки ДПФ  $\tilde{X}(j\omega_k) = \tilde{X}(jk)$ . Весовая функция представляет окно, через которое наблюдается входной сигнал, длиной ее определяется время анализа  $T_a = NT_D$  или время наблюдения сигнала.

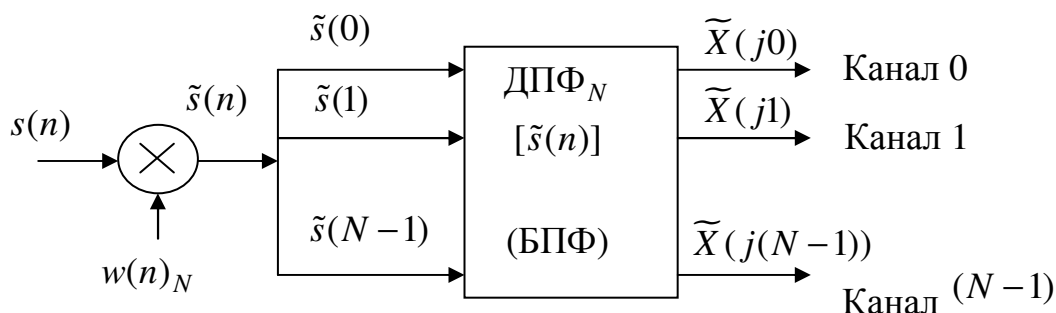


Рис. 4.1. Структурная схема анализатора спектра на основе ДПФ, представленная его базовыми элементами

Умножению или взвешиванию во временной области соответствует свертка в частотной, поэтому вычисляемое ДПФ фактически является дискретизированной сверткой истинного спектра анализируемого сигнала  $X(j\omega)$  с частотной характеристикой (спектром) весовой функции  $W(j\omega)$ :

$$\widetilde{X}(j\omega_k) = X(j\omega) * W(j\omega) | \omega = \omega_k,$$

где  $*$  – символ свертки.

Вычисляемое ДПФ содержит систематическую (методическую) погрешность анализа, которая является следствием ограничения сигнала по длительности, искажающего результаты спектрального анализа.

Применение специальных весовых функций или окон позволяет сгладить или ослабить вызываемое временным усечением влияние или эффект разрывов сигнала на краях. Кроме этого, взвешивание позволяет [4]:

- устранять нежелательные эффекты, связанные с явлением Гиббса, вызванного наличием разрывов на границах исследуемых отрезков сигнала; взвешивающее окно плавно сводит на нет функцию вблизи краев анализируемого участка, устраняя разрывы функции;

- добиться значительного снижения вычислительной сложности процесса обработки, так как ДПФ вычисляется не на всей длине сигнала, а на интервалах, на которые разбивается сигнал;

- оконное ДПФ дает возможность получить не просто частотное, а частотно-временное представление сигнала, что делает возможным применения его для анализа нестационарных сигналов с довольно быстрым изменением частотного сигнала.

Однако у оконного ДПФ есть один недостаток, обусловленный принципом неопределенности Гейзенберга, который гласит, что невозможно получить произвольно точное частотно-временное представление

сигнала, то есть нельзя определить для заданного момента времени, какие спектральные компоненты присутствуют в сигнале [4]. Однако можно узнать временные интервалы, в течение которых в сигнале существуют полосы частот. Эта проблема называется проблемой разрешения, и связана она с шириной используемой оконной функции. Узкое окно обеспечивает лучшее временное разрешение, а широкое – лучшее частотное. К тому же для корректного анализа необходимо знать априорную информацию об анализируемом сигнале (в частности, насколько динамичным является сигнал). Если сигнал состоит из далеко отстоящих друг от друга частотных компонент, то можно пожертвовать спектральным разрешением в пользу временного, и наоборот.

Дальнейшая обработка выходных данных ДПФ осуществляется с учетом измеряемых или оцениваемых с помощью ДПФ спектральных характеристик, зависящих от вида анализируемых сигналов.

Для периодических сигналов  $s_p(n)_N$  с периодом  $NT_D$  оценивают амплитуды  $A_m(\omega_i)$  и фазы  $\varphi(\omega_i)$  гармоник с частотой  $\omega_D / N$  или их средние за период мощности  $[A_m(\omega_i)]^2 / 2$ .

Для детерминированных сигналов конечной длительности  $s(n)_N$  (непериодических) оценивают [4]:

- спектральную плотность  $X(j\omega)$ , определяемую ее модулем  $|X(j\omega)|$  и аргументом  $\varphi(\omega)$ , т. е. амплитудным и фазовым спектрами или реальной  $X_{\text{Re}}(j\omega)$  и мнимой  $X_{\text{Im}}(j\omega)$  частями и вычисляемую на частотах анализа  $\omega = \omega_k$  или бинах ДПФ;

- энергетический спектр или спектральную плотность энергии  $S_x(\omega)$   $(|X(j\omega)|^2)$  размерностью, показывающую распределение энергии сигнала по частоте и также вычисляемую на дискретных частотах  $\omega_k$ .

Для случайных сигналов  $s(n)$  оценивают спектральную плотность мощности  $P_s(\omega)$ , являющуюся статистическим расширением понятия спектральной плотности энергии на случайные сигналы, т. е. сигналы с бесконечной энергией и также вычисляемую на дискретных частотах  $\omega_k$ . Для стохастически связанных случайных сигналов  $s(n)$ ,  $y(n)$  с помощью ДПФ измеряют их взаимную спектральную плотность мощности  $P_{sy}(j\omega)$ .



При реализации конкретных алгоритмов спектрального анализа различных сигналов важное значение имеет правильное масштабирование результатов анализа и учета их размерности.

Так, по вычисленному ДПФ:

$$X(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_p(n) e^{-j\omega_k n T_D},$$

вещественного периодического сигнала  $s_p(n)_N$  с периодом  $NT_D$  и частотами гармоник  $f_D / N$ , совпадающими с бинами ДПФ, амплитуды гармоник  $A_m(\omega_i)$  определяются как:

$$A_m(\omega_i) = (2 / N) |X(j\omega_i)|;$$

фазы  $\varphi(\omega_i)$  как:

$$\varphi(\omega_i) = \arctg[X_{\text{Im}}(j\omega_i) / X_{\text{Re}}(j\omega_i)];$$

и средние мощности как:

$$P_{cp}(\omega_i) = 2 |(1 / N) X(j\omega_i)|^2.$$

По ДПФ  $X(j\omega_k)$  детерминированного сигнала конечной длительности  $NT_D$  аналогичным образом находятся амплитуды, фазы и мощности  $k$ -й частотной выборки спектра сигнала.

Другие спектральные характеристики такого сигнала связаны с его ДПФ следующими выражениями [4].

Спектральная плотность энергии на частоте  $\omega_k$ :

$$S_s(k) = |T_D X(j\omega_k)|^2.$$

Спектральная плотность мощности на частоте  $\omega_k$ :

$$P_s(k) = T_D / N |X(j\omega_k)|^2.$$

Полная энергия сигнала:

$$S_s = \frac{1}{NT_D} \sum_{k=0}^{N-1} S_s(k).$$

Средняя мощность сигнала:

$$P_s = \frac{1}{NT_D} \sum_{k=0}^{N-1} P_x(k).$$

Пример работы спектроанализатора. На вход спектроанализатора подается сигнал, являющийся суммой синусов с частотами 5 КГц, 10 КГц и 15 КГц (рис. 4.2)

$$c(n) := 0.06 \sin(2\pi T \cdot n \cdot 5000) + 0.08 \sin(2\pi T \cdot n \cdot 10000) + 0.06 \sin(2\pi T \cdot n \cdot 15000)$$

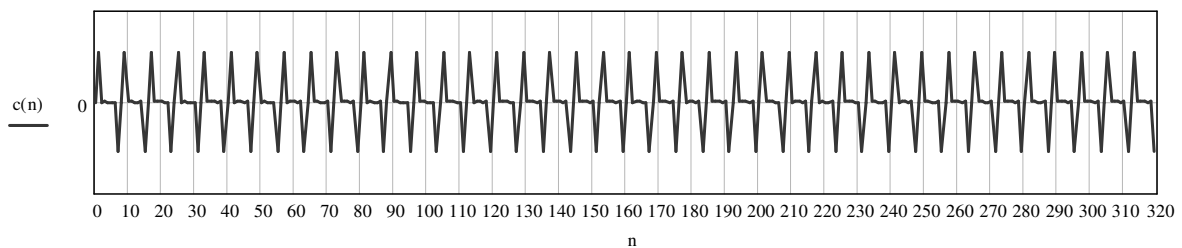


Рис. 4.2. Входной сигнал



Рис. 4.3. Спектральная плотность энергии сигнала на интервале ( $N = 128 - 191$ )

Анализ рис. 4.3 показывает, что энергия сигнала сосредоточена на частотах 5 КГц, 10 КГц и 15 КГц. Боковые составляющие обусловлены влиянием окна Хэмминга ( $T_a = 64$ ).

Так, как выходная последовательность представляет собой спектральную плотность энергии сигнала, то главную роль играет доленое участие соответствующей полосы частот в образовании сигнала. Поэтому на графике значения по оси  $Y$  представлены в нормированном виде.

#### 4.1.3. Частотная характеристика анализатора спектра на основе ДПФ

Существует тесная связь между ДПФ и цифровой фильтрацией. Для ее установления запишем отклик НЦФ с конечной импульсной характеристикой  $h(n)$  длиной  $N$  на анализируемый с помощью ДПФ сигнал  $s(n)$  в момент времени  $nT_D = (N-1)T_D$  (при  $n = N-1$ ) [4]:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)s(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} s(m)h(n-m).$$

Из сопоставления выше представленных выражений следует, что выход канала ДПФ  $X(j\omega_k)$  совпадает с выходом НФ с импульсной характеристикой, отвечающей условию:

$$h(N-1-m) = w(m)e^{-j\omega_k m T_D},$$

или

$$h(m) = w(N-1-m)e^{-j\omega_k (N-1-m) T_D}.$$

Это означает, что  $k$ -й канал ДПФ эквивалентен полосовому НЦФ с импульсной характеристикой  $h(m)$ , согласованной со взвешенным комплексным гармоническим сигналом  $w_k(m) = w(m)e^{j\omega_k m T_D}$  в соответствии с условием согласования:  $h(n) = w_k^*(N-1-m)$ , (\* – комплексное сопряжение). Такой фильтр имеет частотную характеристику:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega(N-1)T_D} W^*[j(\omega - \omega_k)], \quad (3.9)$$

являющуюся комплексно-сопряженной частотной характеристикой весовой функции  $W^*(j\omega)$ , смещенной вправо к частоте  $\omega_k > 0$  (центральной частоте канала  $k > 0$ ) или влево к частоте  $\omega_k < 0$  (центральной частоте канала  $k < 0$ ).

Частотную характеристику НФ можно определить также по его отклику  $y(N-1)$  на комплексный гармонический сигнал  $s(n) = e^{j\omega n T_D}$ , отнесенному к значению этого сигнала при  $n = N-1$  [4]:

$$H(j\omega_k, \omega) = \text{ДПФ}_N \left\{ e^{j\omega n T_D} w(n) \right\} / e^{j\omega(N-1)T_D} = e^{-j\omega(N-1)T_D} W^*[j(\omega - \omega_k)],$$

что совпадает с выражением для частотной характеристики.

Аналогичным образом можно определить и частотную характеристику канала ДПФ, обозначаемую  $H(j\omega_k, \omega)$ , в виде отношения его отклика на комплексный гармонический сигнал  $s(n) = e^{j\omega n T_D}$  к значению сигнала при  $n = N-1$ :

$$H(j\omega_k, \omega) = \text{ДПФ}_N \left\{ e^{j\omega n T_D} w(n) \right\} / e^{j\omega(N-1)T_D} = e^{-j\omega(N-1)T_D} W^*[j(\omega - \omega_k)].$$

Максимум частотной характеристики канала имеет место на частоте  $\omega = \omega_k$ , при этом на частоты  $\omega > 0$ , совпадающие с бинами ДПФ, откликаются каналы анализатора спектра с номерами  $k > 0$  в полосе частот  $(0 \dots \omega_D / 2)$ , а на частоты  $\omega < 0$  (иначе на сигнал  $s(n) = e^{-j\omega n T_D}$ ), совпадающие с бинами ДПФ, откликаются каналы с номерами  $k < 0$  в полосе частот  $(-\omega_D / 2 - 0)$ .

Таким образом, анализатор спектра на основе ДПФ обеспечивает разрешение комплексных гармонических сигналов как по частоте, так и по знаку частоты. При вычислении ДПФ в диапазоне частот  $(0 \dots f_D)$ , при  $k = 0, 1, \dots, (N-1)$ , отрицательным значениям  $k_- = -1, -2, \dots, -N/2$  соответствуют значения  $k = k_- + N$ .

В качестве примера можно определить частотную характеристику анализатора спектра с прямоугольной весовой функцией  $w_R(n)$  длиной  $N$ .

Ее преобразование Фурье:

$$W_R(j\omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} [\sin(\omega NT_D/2) / \sin(\omega T_D/2)].$$

Каналы  $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$  анализатора спектра, откликающиеся на сигнал  $s(n) = e^{j\omega_n T_D}$ , для данной весовой функции описываются частотной характеристикой:

$$H_R(j\omega_k, \omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin[(\omega - \omega_k)NT_D/2]}{\sin[(\omega - \omega_k)T_D/2]}.$$

Выражение для частотных характеристик каналов  $k_- = -1, -2, \dots, -(N-1)/2$  или  $k = (N-1)/2, \dots, (N-1)$ , откликающихся на сигнал  $s(n) = e^{-j\omega_n T_D}$ , имеет вид:

$$H_R(j\omega_k, \omega) = e^{j\omega(N-1)/2} \frac{\sin[(\omega + \omega_k)NT_D/2]}{\sin[(\omega + \omega_k)T_D/2]}.$$

Графики модулей частотных характеристик каналов анализатора спектра представлены на рис. 4.4 [4]. Частотная характеристика канала имеет главный лепесток шириной  $\Delta f_{gl} = 2f_D / N = 2$  бина и боковые лепестки шириной 1 бин ( $f_D / N$ ) с относительным уровнем максимального бокового лепестка  $\delta_{bl \max} = -13,6 \text{ дБ}$  (боковые лепестки на рисунке показаны только для одного канала).

Как видно из рис. 4.4 [4], частотные характеристики всех каналов перекрываются. Однозначное разрешение комплексного гармонического сигнала имеет место только на частотах  $\omega = \omega_k$ , совпадающих с частотами анализа ДПФ, когда на интервале анализа укладывается целое число периодов сигнала:

$$T_a = NT_D = kT,$$

(частота  $\omega_1$  на рис. 4.4).

В этом случае сигнал присутствует только на выходе одного канала или говорят – проецируется на 1 бин ДПФ. При этом возможны обнаружение и оценка параметров сигнала по вычисленному значению ДПФ  $X(j\omega_k)$ .

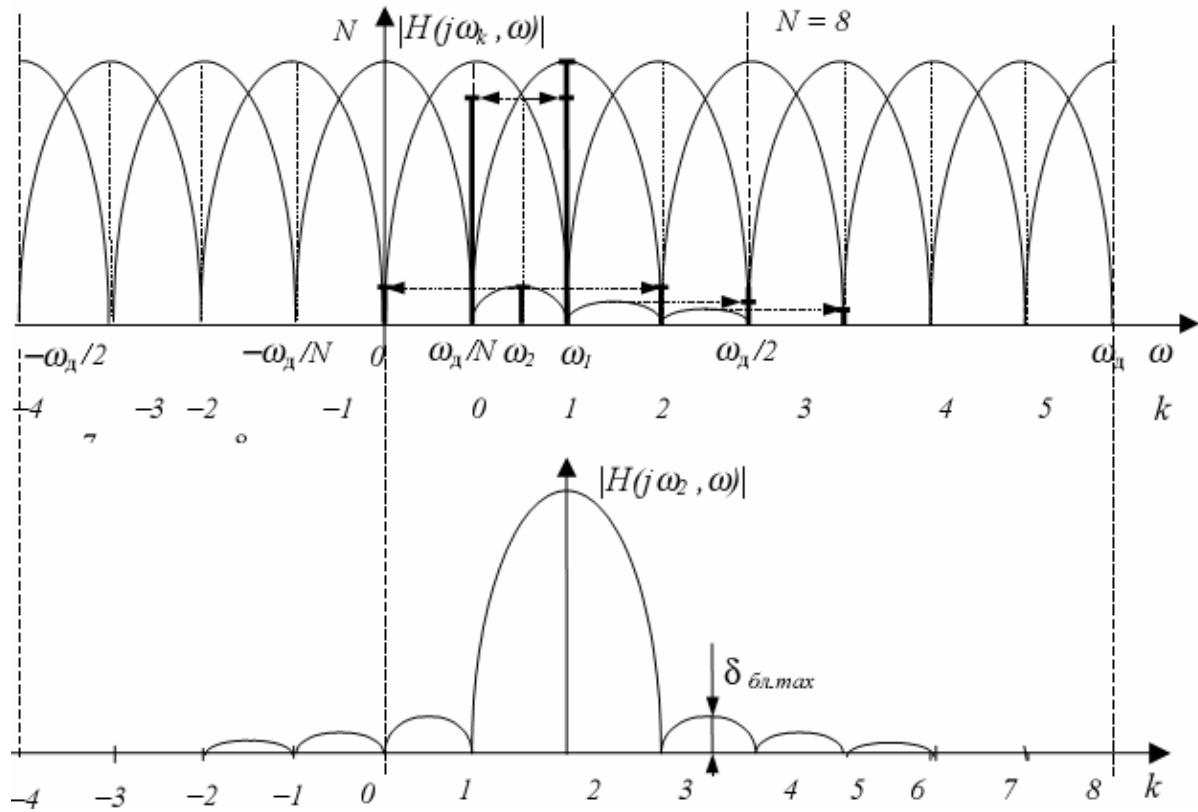


Рис. 4.4. Частотная характеристика  $N$ -канального анализатора спектра с прямоугольной весовой функцией и частотная характеристика одного канала

На сигналы с частотой  $\omega \neq \omega_k$  (частота  $\omega_2$  на рис. 4.4) откликаются два соседних канала на уровне главных лепестков их частотных характеристик, а на уровне боковых лепестков откликаются все каналы ДПФ, т. е. присутствует на выходах всех каналов. Это явление называют размыванием спектра, дроблением или просачиванием спектра между каналами. При этом затруднительны однозначное обнаружение сигнала и оценка его параметров.

Важной для практики является задача обнаружения и оценки параметров вещественных гармонических сигналов  $s(n) = (\cos \omega n T_D)$ . Такой сигнал можно представить в виде суммы двух комплексных гармонических сигналов с частотой  $\omega > 0$  и  $\omega < 0$ :

$$s(n) = \frac{1}{2} [e^{j\omega n T_D} + e^{-j\omega n T_D}] = \frac{1}{2} [s_1(n) + s_2(n)].$$

В соответствии с принципом суперпозиции, ДПФ сигнала  $s(n)$  также можно найти как сумму откликов на его комплексно-сопряженные составляющие, определяемые частотной характеристикой анализатора спектра.

## 4.2. Весовые функции. Связь ДПФ цифровой фильтрацией при анализе спектра

### 4.2.1. Весовые функции для гармонического спектрального анализа

Высокий уровень боковых лепестков и обусловленное им взаимное влияние каналов анализатора спектра является основным недостатком прямоугольной весовой функции. Особенно оно существенно при разрешении нескольких одновременно действующих сигналов или при наличии сосредоточенных помех. Эти недостатки преодолеваются при использовании весовых функций, имеющих меньший уровень боковых лепестков [4].

Для подавления просачивания обычно используют временные окна, сглаживающие исходную реализацию таким образом, чтобы подавить резкие вариации на ее начальном и конечном участках. Однако при этом возрастает ширина главного лепестка  $\Delta f_{\text{гл}} = Df_D / N$ ,  $D > 2$ . Это приводит к увеличению числа каналов с перекрывающимися главными лепестками частотных характеристик и ухудшению разрешающей способности анализатора спектра. Например, у анализатора спектра с весовой функцией Хэмминга, имеющей параметры  $\Delta f_{\text{гл}} = 4f_D / N$ ,  $\delta_{\text{бл max}} = -41 \text{ дБ}$ , перекрываются главные лепестки частотных характеристик трех соседних каналов (рис. 4.5) [4].

Даже при  $\omega = \omega_k$  (частота  $f_1$  на рис. 4.5) сигнал одновременно присутствует на выходах трех каналов (проецируется на три бина ДПФ), а при  $\omega \neq \omega_k$  (частота  $f_2$  на рис. 4.5) без учета боковых лепестков проецируется на 4 бина ДПФ.

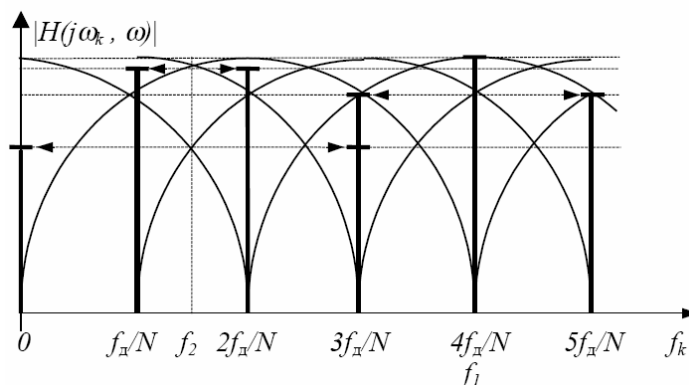


Рис. 4.5. Частотные характеристики каналов анализатора спектра с весовой функцией Хэмминга

Улучшение разрешения анализатора спектра с весовыми функциями, имеющими широкий главный лепесток, обеспечивается путем увеличения числа точек ДПФ  $N$ , т. е. увеличением времени анализа сигнала  $T_a = NT_D$ .

От параметров весовой функции зависят также фильтрующие свойства анализатора спектра при обработке зашумленных гармонических и полигармонических сигналов. Большую роль играют весовые функции и при спектральном анализе случайных сигналов. В то же время умножение на весовую функцию, отличную от прямоугольной, приводит к увеличению общего объема вычислений при спектральном анализе. Для ряда весовых функций умножение во временной области может быть заменено сверткой в частотной области с дискретизированной частотной характеристикой весовой функции. Например, для весовых функций Ханна и Хэмминга такая свертка вычисляется путем скользящего весового усреднения трех соседних частотных выборок с весами соответственно 0,25; 0,5; 0,25 и 0,23; 0,54; 0,23.

#### 4.2.2. Основные параметры весовых функций при спектральном анализе

Эквивалентная шумовая полоса весовой функции  $\Delta F_{ш}$ , выражаемая в бинах. Находится при действии на входе анализатора спектра белого шума, имеющего полосу  $\pm f_D / 2$ , из условия равенства мощности шума  $P_{швф}$  на выходе эквивалентного цифрового фильтра нижних частот с частотной характеристикой весовой функции  $W(j\omega)$  и мощности шума  $P_{шн}$  на выходе идеального фильтра, имеющего полосу пропускания  $\Delta F_{ш}$  и максимум квадрата АЧХ  $|W(j0)|^2$  (рис. 4.6) [4]:

$$P_{швф} = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\omega_D/2}^{\omega_D/2} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{T_D} N \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n),$$

где  $N_0$  – спектральная плотность мощности белого шума на входе фильтра (или канала).

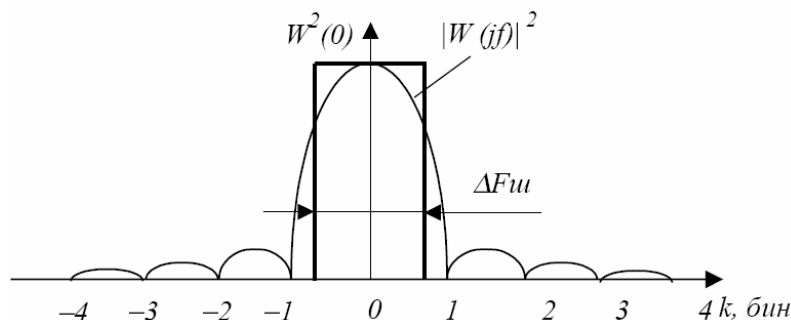


Рис. 4.6. Определение эквивалентной шумовой полосы весовой функции

Максимальное усиление весовой функции на частоте  $\omega = 0$  определяется как  $W(j0) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)$  – по уровню, и  $|W(j0)|^2 = \left( \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2$  – по мощности.

Мощность шума на выходе идеального фильтра  $P_{шш} = \frac{N_0}{T_D} |W(j0)|^2 \Delta F_{ш}$ .

Приравнивая мощности  $P_{швф} = P_{шш}$ , можно найти выражение для эквивалентной шумовой полосы весовой функции и, соответственно, эквивалентной шумовой полосы канала анализатора спектра [4]:

$$\Delta F_{ш} = N \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) / \left( \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2, \text{ бин}.$$

При этом мощность действующего на входе анализатора спектра белого (широкополосного) шума уменьшается на выходе анализатора спектра в число раз, равное  $N / \Delta F_{ш}$ .

Ширина главного лепестка частотной характеристики весовой функции по уровням 3 и 6 дБ, в бинах:  $\Delta F_{эл(3/6)}$ . Значение  $\Delta F_{эл(6)}$  определяет разрешающую способность анализатора спектра по частоте:

$$\Delta f_p = \Delta F_{эл(6)} f_D / N.$$

Если  $\Delta f_p$  задано, то по нему находится необходимое время анализа:

$$NT_D = \Delta F_{эл(6)} / \Delta f_p.$$

Совокупность параметров  $\Delta F_{эл(3)}$  (полосы по уровню половинной мощности) и  $\Delta F_{ш}$  определяет качество весовой функции  $\delta = (\Delta F_{эл(3)} - \Delta F_{ш}) / \Delta F_{эл(3)}$  в случае, когда входная последовательность представляет сумму гармонических составляющих с частотами, не кратными  $f_D / N$ , т. е. не совпадающими с бинами ДПФ, и белого шума.

Когерентное усиление весовой функции:  $K_{коз} = |W(j0) / N|$ . Определяет нормированное к  $N$  усиление канала ДПФ с данной весовой функцией на центральной частоте канала  $f_k$ .

Максимальный уровень боковых лепестков  $\delta_{бл\max}$ , дБ.

Паразитная амплитудная модуляция спектра. Определяется отношением значения частотной характеристики весовой функции на частоте  $f = f_D / 2N$  к максимальному значению частотной характеристики на частоте:

$$f = 0 : A_{n,дБ} = 20 \lg \left[ |W(j\omega)|_{(\omega=\omega_D/2)} / W(j0) \right].$$



Значение  $A_n$  характеризует искажения или потери оценок ДПФ в случае самых неблагоприятных для ДПФ частот сигнала  $f = f_k \pm f_D / 2N$ .

Значения параметров для некоторых весовых функций представлены на рис. 4.7[4].

Тип ВФ	$\Delta F_{ш}$ , бин	$\Delta F_{эл(3/6)}$ , бин	$K_{коз}$	$\delta_{бл}$ , дБ	$A_n$ , дБ
Прямоугольная	1	0,89 / 1,21	1	-13,6	-3,92
Треугольная	1,33	1,28 / 1,78	0,5	-27	-1,82
Хемминга	1,36	1,30 / 1,81	0,54	-41	-1,78
Блэкмана	1,73	1,68 / 2,36	0,42	-57	-1,1

Рис. 4.7. Значение параметров весовых функций

#### 4.2.3. Элементы анализа спектра с помощью ДПФ и цифровой фильтрации

Наряду с оценкой спектра на заданном интервале наблюдения, существуют задачи анализа изменения спектра во времени или текущего спектрального анализа, относящегося к нестационарным детерминированным и случайным сигналам. Для этой цели применяют скачущие и скользящие ДПФ [4].

Скачущими называют ДПФ с неперекрывающимися (стыкующимися) или частично перекрывающимися интервалами наблюдения с коэффициентами перекрытия 0, 0,25, 0,5, 0,75 и другими.

Скользящее ДПФ вычисляется по текущему  $N$ -точечному набору или вектору данных  $\{s(n - N + 1) \dots s(n)\}$  при значениях  $s = N - 1 + l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Очевидно, что скачущие ДПФ являются лишь отсчетами скользящего ДПФ при значениях  $n = N - 1 + lN$  (скачущее ДПФ без перекрытия),  $n = N - 1 + lN/2$  (скачущее ДПФ с перекрытием 0,5) и т. д.

Скачущие ДПФ с коэффициентами перекрытия 0,25, 0,5 и более используются и для усреднения шумовой составляющей погрешности анализа стационарных сигналов при общем ограниченном времени наблюдения сигнала.

Канал скачущего ДПФ эквивалентен согласованному ЦФ, с выхода которого снимается каждый  $N$ -й или каждый  $(N/2)$ -й и т. д. отсчеты сигнала, что соответствует понижению частоты дискретизации выходного сигнала фильтра в  $N$ ,  $N/2$  и т. д. раз. При этом периодически повторяющийся с частотой дискретизации спектр выходного сигнала фильтра периодизируется с мень-

шей в соответствующее число раз частотой  $f'_D = f_D / N, f'_D = 2f_D / N$ , в результате чего происходит наложение спектров в основной полосе частот  $0 \pm f'_D$ . В эту полосу и трансформируются или заворачиваются все внеполосные частотные составляющие обрабатываемого сигнала. Наиболее сильно эффект наложения проявляется у ЦФ, эквивалентных скачущему ДПФ без перекрытия (с понижением частоты дискретизации в  $N$  раз). Наглядное представление о нем дает наложение в основной полосе частот  $(0 \pm f_D / 2N)$  разнесенных на  $kf_D / N$  частотных характеристик каналов ДПФ. Трансформация частоты  $f_i = kf'_D + \Delta f_i$   $i$ -частотной составляющей сигнала в частоту  $f'_i$  основной полосы  $(0 \pm f'_D / 2)$  осуществляется в данном случае в соответствии с соотношением [4]:  $f'_i = \Delta f_i$ , если  $k$  – четное и  $f'_i = -\Delta f_i$ , если  $k$  – нечетное, где  $k = \left[ f_i / f'_D \right]_{цч.окр.} = 0, \pm 1, \dots, \pm N / 2$  – целая часть отношения  $f_i / f'_D$  с округлением;  $\Delta f_i = f_i - kf'_D$ ,  $-f'_D / 2 \leq \Delta f_i \leq f'_D / 2$ . Кратность наложения в данном случае составляет  $N$ .

При коэффициенте перекрытия 0,5 (коэффициенте прореживания  $N/2$ ) частота дискретизации выходного сигнала ЦФ составляет  $f'_D = 2f_D / 2$ , а основная полоса частот  $(0 \pm f_D / N)$ . Она соответствует ширине главного лепестка частотной характеристики ЦФ с прямоугольной весовой (импульсной) характеристикой, для которого периодизированные с периодом  $2f_D / N$  частотные характеристики не перекрываются на уровне главных лепестков, а их перекрытие в основной полосе частот  $(0 \pm f_D / N)$  также характеризует эффект наложения и связанные с ним частотные преобразования. Трансформация частот здесь осуществляется в соответствии с теми же соотношениями, что и в предыдущем случае. Кратность наложения при этом составляет  $N/2$ .

Эффект наложения при спектральном анализе с перекрытием может быть существенно ослаблен использованием весовых функций с малым уровнем боковых лепестков. В то же время перекрытие окон (интервалов наблюдения) ведет к увеличению объема вычислений и в каждом конкретном случае должно быть обоснованным.

Скользящее ДПФ требует очень большого объема вычислений, поэтому в большинстве случаев его заменяют гребенкой цифровых фильтров, состоящей из гребенчатого фильтра и набора комплексных цифровых резонаторов (рис. 4.8) [4].

Такой анализатор спектра с прямоугольной весовой функцией требует  $N$  комплексных операций умножения на один отсчет сигнала. Число каналов его определяется требуемой полосой анализа сигнала. Каждый канал анализатора спектра описывается следующим рекуррентным уравнением:

$$X(j\omega_k, n) = e^{-j\omega_k n T_D} X(j\omega_k, n-1) + s(n) - s(n-N).$$

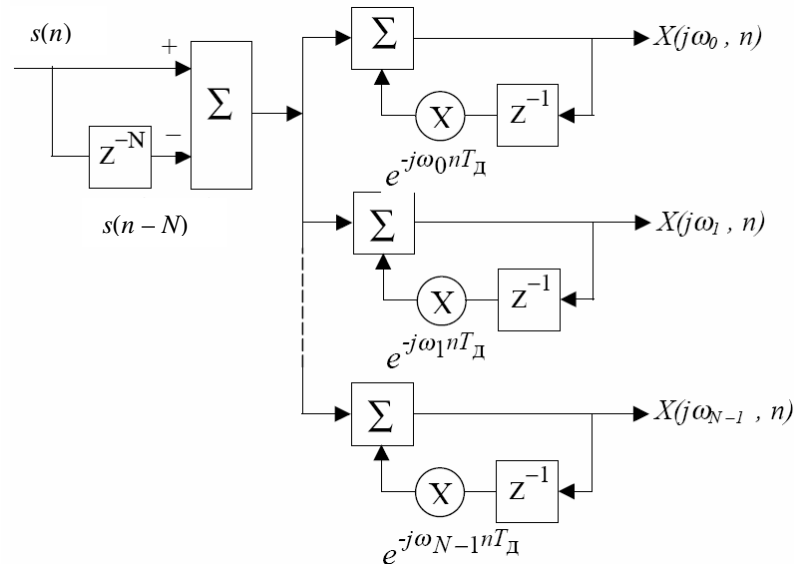


Рис. 4.8. Структура анализатора спектра на основе гребенки фильтров

### 4.3. Корреляционные характеристики дискретных случайных сигналов и их статистические оценки

#### 4.3.1. Корреляционные и спектральные характеристики дискретных случайных сигналов

Дискретные случайные сигналы характеризуются [4]: законом распределения, средним значением, средним квадратом или дисперсией, автокорреляцией или автоковариацией, взаимной корреляцией (кросс-корреляцией) или взаимной ковариацией, спектральной плотностью мощности и взаимной спектральной плотностью мощности. Для рассматриваемых далее случайных процессов стационарных в широком смысле и эргодичных полагается, что их среднее значение является постоянным, не зависящим от времени  $nT_D$ , т. е. от номера выборки  $n$ , а автокорреляция и взаимная корреляция зависят только от разности моментов времени  $mT_D = n_2T_D - n_1T_D$ , т. е. от значения дискретной задержки  $m$ . Они определяются как математические ожидания  $E\{\cdot\}$  (средние по ансамблю) или как средние по времени (по одной реализации) соответствующих дискретных функций.

Среднее значение дискретного сигнала  $s(n)$ :

$$\bar{s} = E\{s(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s(n).$$

Автокорреляционная функция (АКФ) дискретного сигнала  $s(n)$ :

$$r_{ss}(m) = E\{s(n+m)s^*(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s(n+m)s^*(n),$$

где символ  $*$  — означает операцию комплексного сопряжения, обобщающую данные статистические характеристики на случай комплексных дискретных сигналов.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) двух дискретных сигналов  $s(n)$  и  $y(n)$ :

$$r_{sy}(m) = E\{s(n+m)y^*(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s(n+m)y^*(n).$$

По максимуму ВКФ находят относительное время задержки обрабатываемых сигналов.

АКФ и ВКФ центрированных случайных сигналов  $[s(n) - \bar{s}]$  и сигналов с нулевым средним значением называют автоковариационной  $c_{ss}(m)$  и взаимной ковариационной  $c_{xy}(m)$  функциями:

$$\begin{aligned} c_{ss}(m) &= E\left\{[s(n+m) - \bar{s}][s^*(n) - \bar{s}]\right\}; \\ c_{sy}(m) &= E\left\{[s(n+m) - \bar{s}][y^*(n) - \bar{y}^*]\right\}. \end{aligned}$$

При этом  $c_{ss}(m) = r_{ss}(m) - |\bar{s}|^2$ ,  $c_{sy}(m) = r_{sy}(m) - \bar{s}\bar{y}^*$ .

АКФ  $r_{ss}(m)$  при  $m=0$  соответствует среднему квадрату случайного сигнала:

$$\bar{s}^2 = r_{ss}(0) = E\{s(n)s^*(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s(n)s^*(n),$$

а автоковариационная функция  $c_{ss}(m)$  — дисперсия сигнала:

$$c_{ss}(0) = D_x = \sigma_x^2.$$

Они связаны соотношением:  $D_x = \overline{s^2} - \overline{|s|}^2$  и определяют среднюю мощность случайного сигнала. Средний квадрат и дисперсия являются максимальными значениями соответственно автокорреляционной и автоковариационной функций. Термины (средний квадрат – дисперсия), (автокорреляция – автоковариация) используются как синонимы.

Спектральную плотность мощности (СПМ) случайного процесса в соответствии с теоремой Винера-Хинчина определяют преобразованием Фурье АКФ (последовательности  $r_{ss}(m)$ ) [4]:

$$P_{ss}(f) = T_D \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ss}(m) e^{-j2\pi f m T_D},$$

для значений частоты, заключенных в основной полосе частот  $(0 \pm f_D / 2)$ .

СПМ показывает, как мощность случайного процесса распределена по частоте. Так как  $r_{ss}(-m) = r_{ss}^*(m)$ , то СПМ является строго действительной положительной функцией. Если АКФ – действительна, то  $r_{ss}(-m) = r_{ss}(m)$  и выражение для СПМ приводится к виду:

$$P_{ss}(f) = 2T_D \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ss}(m) \cos(2\pi f m T_D).$$

При этом  $P_{ss}(f)$  обладает свойством четной симметрии:  $P_{ss}(f) = P_{ss}(-f)$ .

АКФ случайного сигнала может быть определена по его известной СПМ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$r_{ss}(m) = \int_{-f_D/2}^{-f_D/2} P_{ss}(f) e^{j2\pi f m T_D} df.$$

При  $m = 0$   $r_{ss}(0) = \int_{-f_D/2}^{-f_D/2} P_{ss}(f) df$  м соответствует средней мощности

сигнала или его дисперсии. Аналогичным образом вводится определение взаимной спектральной плотности мощности (ВСПМ) двух стационарных случайных сигналов  $s(n)$  и  $y(n)$  как преобразование Фурье их ВКФ:

$$P_{sy}(if) = T_D \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{sy}(m) e^{-j2\pi f m T_D}.$$

Даже для действительных последовательностей  $s(n)$  и  $y(n)$  вследствие несимметрии их ВКФ ВСПМ является в общем случае комплексной. В то же время она обладает свойством  $P_{sy}(jf) = P_{ys}^*(jf)$ .

#### 4.3.2. Статистические оценки корреляционных характеристик дискретных случайных сигналов

При спектральном и корреляционном анализе случайных сигналов вместо истинных АКФ, ВКФ, СПМ, ВСПМ используются их статистические оценки, получаемые по конечному набору данных или по реализациям сигнала конечной длины, а для СПМ и ВСПМ – и конечному числу усредняемых реализаций сигнала. Они определяются следующим образом [4].

Оценка автокорреляции (АКФ):

$$\begin{aligned}\hat{r}_{ss}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} s(n+m)s^*(n), 0 \leq m \leq N-1, \\ \hat{r}_{ss}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} s^*(n+|m|)s(n), \quad -(N-1) \leq m \leq 0.\end{aligned}$$

Данная оценка является смещенной, ее математическое ожидание (произведение истинной АКФ и треугольной весовой функцией) не равно  $r_{ss}(m)$ . Однако, она более эффективна, чем несмещенная оценка.

Оценка взаимной корреляции (ВКФ):

$$\begin{aligned}\hat{r}_{sy}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} s(n+m)y^*(n), 0 \leq m \leq N-1, \\ \hat{r}_{sy}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} s(n)y^*(n+|m|), \quad -(N-1) \leq m \leq 0.\end{aligned}$$

Она также является смещенной.

При оценке авто и взаимной ковариации используется оценка среднего значения случайного процесса:

$$\hat{s}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n).$$

### 4.3.3. Статистические оценки спектральной плотности мощности дискретных случайных сигналов

Статистическими оценками СПМ и ВСПМ как преобразований Фурье АКФ и ВКФ случайных процессов являются соответственно преобразования.

Фурье введенных выше статистических оценок АКФ и ВКФ, вычисляемых по реализациям сигнала конечной длины  $N$  [4]:

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{ss}(f) &= T_D \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \widehat{r}_{ss}(m) e^{-j2\pi f m T_D} . \\ \widehat{P}_{sy}(jf) &= T_D \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \widehat{r}_{sy}(m) e^{-j2\pi f m T_D} .\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются оценки СПМ (ВСПМ)  $\widetilde{P}_{ss}(f)$ ,  $\widetilde{P}_{ss}(jf)$  по смещенным оценкам АКФ и ВКФ  $\widetilde{r}_{ss}(m)$ ,  $\widetilde{r}_{sy}(m)$ . Обе оценки СПМ (ВСПМ) являются смещенными: их математические ожидания представляют собой свертки истинной СПМ (ВСПМ)  $P_{ss}(f)$  ( $P_{sy}(jf)$ ) с частотной характеристикой  $W(jf)$  весовой функции (окна)  $w(m)$ , ограничивающего длину преобразуемой АКФ (ВКФ). При несмещенной оценке АКФ (ВКФ) – это прямоугольное окно  $w_R(m)$  и

$$E\{\widehat{P}_{ss}(f)\} = P_{ss}(f) * W_R(f), \quad E\{\widehat{P}_{sy}(jf)\} = P_{sy}(jf) * W_R(f),$$

при смещенной оценке АКФ (ВКФ) – это треугольное окно  $w_T(m)$  с частотной характеристикой  $W_T(f) = W_R^2(f/2)$  и

$$\begin{aligned}E\{\widetilde{P}_{ss}(f)\} &= P_{ss}(f) * (2/N)W_R^2(f), \\ E\{\widetilde{P}_{ss}(jf)\} &= P_{ss}(jf) * (2/N)W_R^2(f),\end{aligned}$$

где  $W_R(f) = \sin(\pi f N T_D) / \sin(\pi f T_D)$ .

Дисперсия (погрешность) оценок СПМ (ВСПМ), как и оценок АКФ (ВКФ), возрастает с уменьшением длины реализации  $N_1$  и увеличением максимального вычисляемого индекса  $m_{max}=M-1$ , где  $M \leq N_1$ , что обусловлено уменьшением эффекта усреднения. Максимальная погрешность оценки СПМ (ВСПМ) имеет место при  $M = N_1$ . Она соизмерима со средним значением СПМ (ВСПМ) и является практически неприемлимой. Вычисление СПМ (ВСПМ) случайных сигналов по оценкам их АКФ (ВКФ) называют косвенным методом спектрального анализа случайных сигналов или методом коррелограмм.

#### 4.3.4. Коррелограммный метод вычисления спектральной плотности мощности дискретных случайных сигналов

Вычисляя с помощью ДПФ автокорреляционные и взаимокорреляционные последовательности  $r_{ss}(m)$ ,  $r_{sy}(m)$  для значений задержки  $-(M-1) \leq m \leq (M-1)$ , где  $M \leq N_1$ , взвешивая их корреляционным окном  $\omega(m)$  той же длины и выполняя их ДПФ по числу точек  $N = 2M - 1$ , можно найти коррелограммные оценки СПМ  $P_{ss}(k)(f)$  и ВСПМ  $P_{sy}(k)(jf)$  на дискретных частотах  $fk = kf_D/N$  [4]:

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{ss(k)}(f_k) &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{ss}(m) e^{-j2\pi f_k m T_D} = 2 \sum_{m=0}^{M-1} r_{ss}(m) \cos(2\pi f_k m T_D); \\ \widehat{P}_{sy(k)}(jf_k) &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{sy}(m) e^{-j2\pi f_k m T_D},\end{aligned}$$

где  $k = 0, \dots, 2M - 1$ .

Число  $N$  вычисляемых точек ДПФ может быть увеличено добавлением к преобразуемой последовательности  $N_0$  нулевых отсчетов с целью уменьшения шага дискретизации оценок СПМ (ВСПМ) по частоте  $(f_D / N)$  или приведения  $N$  к целой степени двойки:  $N = 2M - 1 + N_0$ , необходимой для применения алгоритма БПФ.

#### 4.3.5. Вычисление спектральной плотности мощности методом периодограмм

Исходными данными для спектрального анализа методом периодограмм являются [4]:

- частота дискретизации сигнала  $f_D$ ;
- требуемое разрешение по частоте  $\Delta f_p$ ;
- общее доступное время наблюдения (регистрации) сигнала  $T_n$ .

Спектральный анализ включает в себя следующие этапы.

Выбирается тип весовой функции  $w(n)$ , исходя из особенностей решаемой задачи, и находится необходимое время анализа или длина реализации (секции) сигнала  $N_1$  из условия некоррелированности соседних секций случайного сигнала и обеспечения требуемого частотного разрешения:

$$\Delta f_p = \Delta F_{2l(6)} f_D / N_1 : N_1 = \Delta F_{2l(6)} f_D / \Delta f_p.$$



Выбирается способ разбиения сигнала на реализации (секции) конечной длины  $N_1$ : без перекрытия секций или с перекрытием секций (рис. 4.9) [4]. Коэффициент перекрытия  $K_{пер}$  может быть равным 0,25; 0,5; 0,75. Чаще всего используется значение  $K_{пер} = 0,5$ . Перекрытие уменьшает общее время анализа и влияние разрывов сигнала на краях секций, но несколько ухудшает точность оценок СПМ, которая также зависит от типа весовой функции.

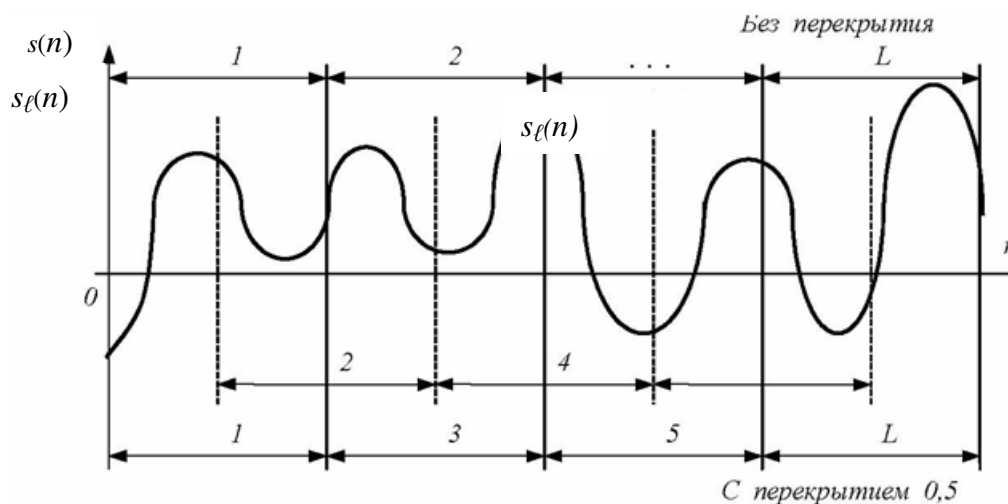


Рис. 4.9. Способы разбиения обрабатываемого сигнала на секции

Выбирается или находится число усредняемых реализаций (секций)  $L$  из следующих возможных условий: из общего доступного времени наблюдения сигнала  $T_n$ :  $L = \{[(T_n/T_D) - K_{пер}N_1]/(N_1 - K_{пер}N_1)\}_{ц.ч.}$ , где (ц.ч.) – символ целой части отношения, заключенного в скобки; из стационарности случайного сигнала на интервале  $T_c = LN_1T_D$ ; из необходимой степени  $q$  уменьшения дисперсии оценки СПМ, т. е. эффективности усреднения. При  $K_{пер} = 0$  (без перекрытия) степень уменьшения дисперсии  $q = L$ , при  $K_{пер} = 0,5$   $q = L / [1 + 2c_{(0,5)}^2(L-1)/L] < L$ , где  $c_{(0,5)}$  – коэффициент, определяемый видом весовой функции:  $c_{(0,5)} = 0,5; 0,25; 0,235$  соответственно для весовых функций прямоугольной, треугольной и Хэмминга. Например, при использовании весовой функции Хэмминга,  $K_{пер} = 0,5$  и  $L = 10$  степень уменьшения дисперсии составляет  $q \approx 9$ .

Вычисляются  $N_1$ -точечные ДПФ для  $L$  реализаций сигнала  $s_l(n) = s[n + (l-1)(1 - K_{пер})/N_1]$ ,  $n = 0, \dots, N_1 - 1$ :

$$\hat{S}l(jk) = \sum_{n=0}^{N_1-1} s_l(n)w(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N_1 - 1, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

Вычисляются значения  $L$  периодограмм:

$$I_{sl}(k) = \frac{1}{U} \left| \widehat{S}_l(jk) \right|^2,$$

где  $U = \sum_{n=0}^{N_1-1} w^2(n).$

Находится усредненная периодограмма или оценка СПМ:

$$\widehat{P}_s(k) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_{sl}(k).$$

Номеру частотной выборки  $k$  СПМ соответствуют значения частоты  $f_k = kf_D / N_1$ .

При недостаточном разрешении по частоте реализации дополняются нулевыми отсчетами  $N_0$ , а при большой дисперсии увеличивается число усредняемых реализаций СПМ –  $L$ . Структурная схема анализатора спектра на основе метода периодограмм приведена на рис. 4.10 [4].

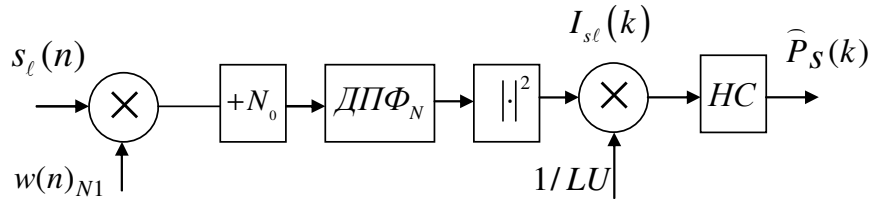


Рис. 4.10. Структурная схема анализатора СПМ случайных сигналов методом периодограмм

На схеме обозначены:  $N_1$  – длина секции (весовой функции);  $N = N_1 + N_0$  – число точек (частотных выборок) ДПФ;  $НС$  – накапливающий сумматор, осуществляющий накопление (усреднение) периодограмм.

При вычислении ВСПМ методом периодограмм (рис. 4.11) [4] секционирование и взвешивание выполняется рассмотренным выше образом для обеих обрабатываемых последовательностей  $s(n)$  и  $y(n)$ . Периодограмма для ВСПМ определяется как:

$$I_{syl}(k) = \frac{1}{U} \text{ДПФ}_N [w(n)s_l(n)] \text{ДПФ}_N^* [w(n)y_l(n)] = \frac{1}{U} \widehat{S}_l(jk) \widehat{Y}_l^*(jk),$$

а усредненная периодограмма или оценка ВСПМ:

$$\widehat{P}_{sy}(k) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_{syl}(k).$$

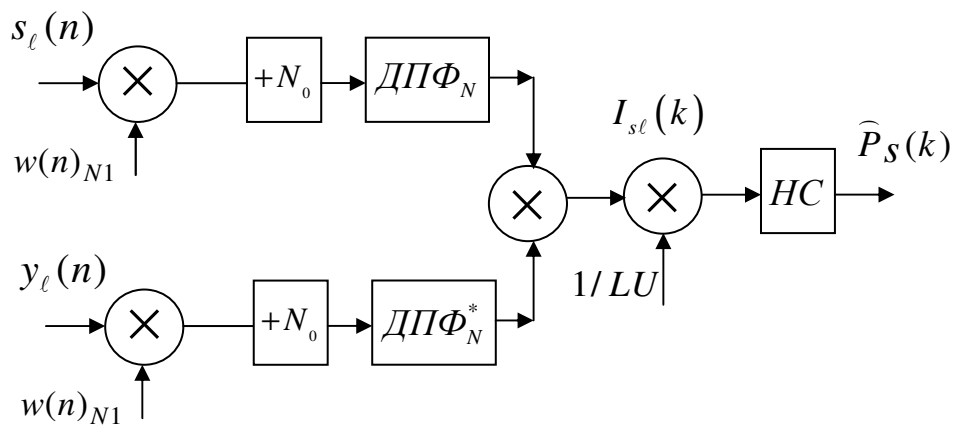


Рис. 4.11. Структурная схема анализатора ВСПМ случайных сигналов методом периодограмм

#### 4.4. Вопросы и задания для самопроверки

1. В каких областях используется спектральный анализ сигналов?
2. Назовите основные методы спектрального анализа.
3. Относится ли частота дискретизации сигнала к основным параметрам его спектра?
4. Назовите основные параметры анализаторов спектра.
5. Представьте структуру анализатора спектра на основе ДПФ.
6. Для решения каких задач в спектроанализаторах применяются весовые функции?
7. Представьте значения основных параметров известных вам весовых функций.
8. В чем отличие между скачущим и скользящим ДПФ?
9. Представьте структуру анализатора спектра на основе гребенки фильтров.
10. Назовите основные характеристики дискретных случайных сигналов.
11. Запишите выражения для определения АКФ и ВКФ.
12. Что характеризуют СПМ и ВСПМ и на основе каких выражений и  $x$  можно определить?
13. Запишите выражения для статистических оценок АКФ, ВКФ, СПМ, ВСПМ.
14. В чем сущность коррелограммного метода вычисления спектральной плотности мощности дискретных случайных сигналов?
15. Назовите основные шаги алгоритма спектрального анализа сигналов методом периодограмм.